République Tunisienne

Ministère de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Commission Nationale Sectorielle de Mathématiques

Master de Recherche en Mathématiques

Mars 2019

Membres de la Commission

Pr. Mohamed Sifi : Coordinateur

Pr. Dorra Bourguiba : Rapporteur

Membres : Professeurs : Moncef Aouadi, Sami Aouaoui, Skander Belhaj, Mourad Bellassoued, Hechmi Ben Messaoud, Ali Benhissi, Béchir Dali, Mondher Damak, Khalifa El Mabouk, Mohamed Hbaib, Mohamed Ali Jendoubi, Sofien Kasmi, Maher Mili, Afif Masmoudi, Maher Moakher, Salem Omri, Adel Saddi.

Master de Recherche en Mathématiques : Parcours Mathématiques Semestre 7

No	Unité d'enseignement	Elément Constitutif d'UE	Volume Horaire (Semaine)			Crédits		Coefficients		Régime d'examen	
			C	TD	TP	ECUE	UE	ECUE	UE	Contrôle continu	Régime mixte
UF1	MR/M71	Algèbre	3	3			7		4		X Examen 3H
UF2	MR/M72	Analyse Complexe	3	3			7		4		X Examen 3H
UF3	MR/M73	Analyse Fonctionnelle	3	3			7		4		X Examen 3H
UO1	MR/M74 Option	A fixer par le département	1h30	1h30			5		2		X Examen 1H30
UT	MR/M75 Transversale	Introduction à Python		2			4		1	X	
Total 23H00/semaine			10h30	12h30		30		15			

Master de Recherche en Mathématiques : Parcours Mathématiques Semestre 8

Unité d'enseignement		Elément Constitutif d'UE	Volume Horaire (Semaine)			Crédits		Coefficients		Régime d'examen	
			C	TD	TP	ECUE	UE	ECUE	UE	Contrôle continu	Régime mixte
UF4	MR/M81	Géométrie différentielle	3	3			7		4		X Examen 3H
UF5	MR/M82	Analyse de Fourier et distributions	3	3			7		4		X Examen 3H
UF6	MR/M83	Unité à fixer de la liste ci-jointe	3	3			7		4		X Examen 3H
UO2	MR/M84 Option	A fixer par le département	1h30	1h30			5		2		X Examen 1h30
UT	MR/M85 Transversale	Projet		2			4		1	X	
Total 23H00/semaine			10h30	12h30		30		15			

Master de Recherche en Mathématiques : Parcours Mathématiques Semestre 9

No	Unité d'enseignement	Elément Constitutif d'UE	Volume Horaire (Semaine)			Crédits		Coefficients		Régime d'examen	
			C			ECUE	UE	ECUE	UE	Contrôle continu	Régime mixte
1	MR/M91	Unité spécifique 1	4h30				7		4		X Examen 3H
2	MR/M92	Unité spécifique 2	4h30				7		4		X Examen 3H
3	MR/M93	Unité spécifique 3	4h30				7		4		X Examen 3H
4	MR/M94 Option	A fixer par le département	3				5		2		X Examen 1h30
5	MR/M95 Transversale	Python 2		2			4		1	X	
Total 18H30/semaine			16H30	2		30		15			

Master de Recherche en Mathématiques : Parcours Mathématiques et Applications

Semestre 7

No	Unité d'enseignement	Elément Constitutif d'UE	Volume Horaire (Semaine)			Crédits		Coefficients		Régime d'examen	
			C	TD	TP	ECUE	UE	ECUE	UE	Contrôle continu	Régime mixte
UF1	MR/MA71	Topologie et Analyse fonctionnelle	3	3			7		4		X Examen 3H
UF2	MR/MA72	Unité spécifique 1	3	3			7		4		X Examen 3H
UF3	MR/MA73	Unité spécifique 2	3	3			7		4		X Examen 3H
UO1	MR/MA74 Option	A fixer par le département	1h30	1h30			5		2		X Examen 1h30
UT	MR/MA75 Transversale	Introduction à Python		2			4		1	X	
Total 23H00/semaine			10h30	12h30		30		15			

Master de Recherche en Mathématiques : Parcours Mathématiques et Applications

Semestre 8

No	Unité d'enseignement	Elément Constitutif d'UE	Volume Horaire (Semaine)			Crédits		Coefficients		Régime d'examen	
			C	TD	TP	ECUE	UE	ECUE	UE	Contrôle continu	Régime mixte
UF4	MR/MA81	Unité spécifique 1	3	3			7		4		X Examen 3H
UF5	MR/MA82	Unité spécifique 2	3	3			7		4		X Examen 3H
UF6	MR/MA83	Unité spécifique3	3	3			7		4		X Examen 3H
UO2	MR/MA84 Option	A fixer par le département	1h30	1h30			5		2		X Examen 1h30
UT	MR/MA85 Transversale	Projet		2			4		1	X	
Total 23H00/semaine			10h30	12h30		30		15			

Master de Recherche en Mathématiques : Parcours Mathématiques et Applications

Semestre 9

No	Unité d'enseignement	Elément Constitutif d'UE	Volume Horaire (Semaine)			Crédits		Coefficients		Régime d'examen	
			C			ECUE	UE	ECUE	UE	Contrôle continu	Régime mixte
1	MR/MA91	Unité spécifique 1	4h30				7		4		X Examen 3H
2	MR/MA92	Unité spécifique 2	4h30				7		4		X Examen 3H
3	MR/MA93	Unité spécifique 3	4h30				7		4		X Examen 3H
4	MR/MA94 Option	Optionnelle (fixée par la commission de Master)	3				5		2	X	X Examen 1h30
5	MR/MA95 Transversale	Python 2		2			4		1	X	
Total 18H30/semaine			16h30	2		30		15			

Contenu des programmes des unités obligatoires en M1

Parcours :Mathématiques fondamentales

Algèbre (Unité obligatoire)

(3h cours et 3h TD)(Semestre 7)

UF	ALGEBRE: Semestre 7		Nbre Heures Cours
1	Arithmétique dans un anneau commutatif, unitaire et intègre.		09H
	1.1	Elément premier et élément irréductible.	
	1.2	Notion de ppcm et pgcd.	
	1.3	Exemples des anneaux quadratiques $Z[\sqrt{n}]$.	
2	Anneaux factoriels.		12H
	2.1	Exemples des anneaux euclidiens et principaux.	
	2.2	Anneaux factoriels. Factorialité de l'anneau des polynômes.	
	2.3	Critères d'irréductibilité dans l'anneau des polynômes.	
3	Anneaux noethériens.		06H
	3.1	Définitions et caractérisations.	
	3.2	Radical d'un idéal, idéal primaire, idéal irréductible,	
	3.3	Décomposition d'un idéal en idéaux primaires.	
4	Modules sur un anneau.		09H
	4.1	Module, Module sans torsion, module de torsion, morphismes, module quotient.	

	4.2	**Module des homomorphismes.**	
	4.3	**Suites exactes de modules.**	
	4.4	**Modules de type fini.**	
	4.5	**Modules libres.**	
5	**Modules sur un anneau principal.**		**06H**
	5.1	**Théorème de la base adaptée et facteurs invariants.**	
	5.2	**Applications.**	
		□□**Groupes abéliens de type fini.**	
		□□**Invariants de similitude d’un endomorphisme.**	

Analyse fonctionnelle (Unité obligatoire)

(3h cours et 3h TD)(Semestre 7)

UF		ANALYSE FONCTIONNELLLE : Semestre 7	Nbre Heures Cours
1	Rappel de quelques notions de topologie.		03H
	1.1	Partie pré compacte et relativement compacte d'un espace métrique.	
	1.2	Bref rappels sur espaces vectoriels normés et les applications linéaires continues.	
2	Théorèmes d'Ascoli et Stone-Weierstrass.		06H
	2.1	Topologie de la convergence uniforme.	
	2.2	Equicontinuité, Théorème d'Ascoli.	
	2.3	Théorème de Stone-Weierstrass.	
3	Théorème de Hahn-Banach.		06H
	3.1	Notions de convexité.	
	3.2	Forme analytique du théorème de Hahn-Banach.	
	3.3	Formes géométriques du théorème de Hahn-Banach.	
4	Les grands théorèmes de l'Analyse Fonctionnelle.		06H
	4.1	Théorème de Baire.	
	4.2	Théorème de Banach-Steinhaus.	
	4.3	Théorème de l'application ouverte.	

	4.4	**Théorème du graphe fermé.**	
5	**Espaces de Hilbert.**		**09H**
	5.1	**Produit Scalaire, orthogonalité.**	
	5.2	**Espaces de Hilbert.**	
	5.3	**Projection sur un convexe fermé, projection orthogonale.**	
	5.4	**Théorèmes de Riesz-Fréchet et Lax-Milgram.**	
	5.5	**Bases hilbertiennes et espaces de Hilbert séparables.**	
	5.6	**La convergence faible dans les espaces de Hilbert.**	
5	**Topologie faible et topologie faible étoile.**		**06H**
	6.1	**Définitions et propriétés élémentaires (on retrouvera les résultats sur la convergence faible dans les espaces de Hilbert).**	
	6.2	**Topologie faible * . Théorème de Banach-Alaoglu-Bourbaki.**	
7	**Espaces réflexifs et espaces séparables.**		**03H**

Analyse Complexe

(3h00 Cours et 3h00 TD) (Semestre 7)

	ANALYSE COMPLEXE : Semestre 7		**Nbre Heures Cours**
1	**Fonctions holomorphes.**		**6H**
	1.1	**Rappels sur le Corps C: Topologie de C .**	
	1.2	**Fonctions holomorphes : Dérivabilité au sens complexe, Equations de Cauchy-Riemann.**	
	1.3	**Propriété géométrique des fonctions holomorphes.**	
2	**Séries entières et fonctions analytiques.**		**6H**
	2.1	**Séries entières: Rayon et disque de convergence, Détermination pratique du rayon de convergence**	
	2.2	**Fonctions définies par une série entière.**	
	2.3	**Fonctions analytiques.**	
	2.4	**Fonction exponentielle, fonction logarithme.**	
3	**Intégrale le long d'un chemin et applications**		**12H**
	3.1	**Opérations sur les chemins.**	
	3.2	**Intégration le long d'un chemin.**	
	3.3	**Formule de Cauchy dans les ouverts convexes : Analycité des fonctions holomorphes. Théorème de Morera.**	
	3.4	**Inégalités de Cauchy et ses conséquences: Inégalités de Cauchy, Théorème de Liouville , Théorème de D'Alembert.**	

	3.5	Principe du maximum et ses conséquences : Propriété de la moyenne, Principe du maximum, Lemme de Schwarz.	
	3.6	Formule de Cauchy pour les chemins homotopes.	
	3.7	Ouverts simplement connexes.	
	3.8	Indice d'un lacet par rapport à un point.	
4	Points singuliers et fonctions méromorphes.		4h30mn
	4.1	Fonctions holomorphes dans une couronne et séries de Laurent.	
	4.2	Points Singuliers, pôles, fonctions méromorphes.	
5	Le théorème des résidus.		7h30mn
	5.1	Le théorème des résidus.	
	5.2	Applications du théorème des résidus au calcul d'intégrales : Fonctions trigonométriques, Fractions rationnelles, Produit d'une Fraction rationnelle et d'un logarithme, Produit d'une Fraction rationnelle et d'une puissance, Calcul de la transformée de Fourier d'une fraction rationnelle, Calcul de la transformée de Laplace d'une fraction rationnelle, Théorème de Rouché.	
6	Topologie de l'espace des fonctions holomorphes et factorisation de Weierstrass		6H
	6.1	Topologie de la convergence compacte	
	6.2	Familles normales	
	6.3	Produit infini, Théorème de Weierstrass sur les fonctions entières, étude des fonctions classiques (Gamma, Zêta, …)	

Unité transversale : Introduction à Python (Unité obligatoire)

2h CI sur machine (Semestre 7)

UT	INTRODUCTION A PYTHON : Semestres 7		Nbre Heures Cours
1	Introduction.		09H
	1.1	Notion d'algorithme.	
	1.2	Opérations élémentaires, Structures conditionnelles, Structures itératives, tableau à une dimension et tableau à deux dimensions.	
	1.3	Notion de coût d'un algorithme et classes de complexité. Travaux Dirigés Applications introduisant la notion de coût d'un algorithme.	
2	Environnement de développement Python.		09H
	2.1	Historique et raisons du choix du langage.	
	2.2	Mode interactif, mode Script, Aide en ligne.	
	2.3	Types élémentaires (classes int, str, float, bool, complex).	
	2.4	Opérations élémentaires sur les différents types élémentaires (approche classique/ approche orientée objet).	
	2.5	Notion de bibliothèque et import des packages prédéfinis (fonctions de bibliothèque).	
	2.6	Instructions élémentaires.	
	2.7	Structures conditionnelles.	

	2.8	**Structures itératives.**	
	2.9	**Présentation des types composés : les types mutables (listes, dictionnaires, ensembles) et non mutables .**	
3	**Les sous programmes en algorithmique.**		**12H**
	3.1	**Fonctions et procédures.**	
	3.2	**Passage de paramètres (Entrée, Sortie, E/S).**	
	3.3	**Variables locales et Variables globales. Chapitre IV : Les fonctions en Python.**	
4	**Les fonctions en Python.**		**12H**
	4.1	**Définition de fonctions par : déf, lambda**	
	4.2	**Variables locales et variables globales.**	
	4.3	**Notion de fonction locale.**	
	4.4	**Réutilisation de modules (import de fonctions).**	
	4.5	**Gestion des erreurs (bloc Try... Except).**	
	4.6	**Documentation des fonctions.**	
	4.7	**Coût de fonctions et classes de complexité.**	

Chapitre 1 : Travaux Dirigés : Applications introduisant la notion de coût d'un algorithme.

Chapitre 2: Travaux Dirigés : Instructions de calculs (opérations arithmétiques, calculs avec import de fonctions prédéfinis,…) en mode interactif (mode console). Ecrire et exécuter des programmes (en utilisant des instructions

élémentaires, des structures conditionnelles et des structures itératives) en mode script. Manipulation des types mutables et non mutables.

Remarque : Les parties algorithmiques et programmation seront enseignées en parallèle. A chaque notion algorithmique on associera son équivalent Python.

Acquis : Maîtriser l'environnement Python. − Connaître l'allocation dynamique de la mémoire. − Savoir différencier entre les types mutables et non mutables en important le module copy. − Savoir calculer le coût d'un algorithme et différencier les classes de complexité (linéaire, quadratique, logarithmique, quasi-linéaire, exponentielle...).

Chapitre 4 : Travaux Dirigés : (Programmation Python) Exercices d'Arithmétiques, nombres premiers, nombres parfaits, nombres amis, calcul de PGCD, PPCM, multiplication égyptienne.

Acquis : Savoir écrire un programme itératif. − Maîtriser la programmation modulaire.

Analyse de Fourier et distributions (Unité obligatoire)

(3h cours et 3h TD)(Semestre 8)

UF	ANALYSE DE FOURIER ET DISTRIBUTIONS : Semestre 8		Nbre Heures Cours
1	Convolution sur R^n.		09H
	1.1	Approximations de l'unité.	
	1.2	Régularisation.	
	1.3	Densité des fonctions C^∞ à support compact.	
	1.4	Espace de Schwartz.	
2	Transformation de Fourier.		12H
	2.1	Transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur Rn et ses propriétés.	
	2.2	Transformation de Fourier dans S et dans L^2.	
	2.3	Théorème d'inversion et Formule de Plancherel.	
3	Distributions.		12H
	3.1	Définition et exemples.	
	3.2	Dérivée au sens des distributions.	
	3.3	Convergence au sens des distributions.	
	3.4	Multiplication d'une distribution et d'une fonction.	
	3.5	Support d'une distribution. Distributions à support compact.	

	3.6	**Convolution des distributions.**	
4	**Distributions tempérées.**		**09H**
	4.1	**Définition; exemples; propriétés.**	
	4.2	**Transformée de Fourier d'une distribution tempérée.**	
	4.3	**Application de l'analyse de Fourier aux équations aux dérivées partielles.**	

Géométrie différentielle (Unité obligatoire)

(3h cours et 3h TD)(Semestre 8)

UF		GEOMETRIE DIFFERENTIELLLE : Semestre 8	Nbre Heures Cours
1		Rappels: Théorème du rang constant pour une fonction de classe C^{∞} définie sur un ouvert de R^n.	03H
2		Sous-variétés de R^n.	15H
	2.1	Différentes caractérisations locales.	
	2.2	Exemples.	
	2.3	Paramétrisation, changement de cartes ou de paramétrisations.	
	2.4	Fonctions sur une sous-variété.	
	2.5	Espace tangent en un point.	
	2.6	Application linéaire tangente.	
	2.7	Rang, Immersions, Submersions, Théorème du rang.	
	2.8	Théorème d'inversion locale.	
	2.9	Fibré tangent.	
3		Champs de vecteurs C^{∞}.	15H
	3.1	Action d'un champ de vecteurs sur une fonction $C\infty$.	

	3.2	**Dérivations et champs de vecteurs.**	
	3.3	**Crochet de deux champs de vecteurs, identité de Jacobi.**	
	3.4	**Champs de vecteurs invariants par un difféomorphisme.**	
4	**Fibré cotangent.**		**09H**
	4.1	**Formes différentielles sur une sous-variété de R^n.**	
	4.2	**Orientation, intégration sur les sous-variétés orientables.**	

Unité transversale : Projet : Etude de textes Mathématiques (Unité obligatoire)

2h TD par projet (Semestre 8)

Choix des projets

Une liste de sujets de projets est proposée aux étudiants au début du premier semestre (le nombre exact est ajusté à la rentrée en fonction des effectifs présents).

La liste des projets est arrêtée au début du premier semestre par la commission du Master.

Les étudiants choisissent leur projet avant la fin du premier semestre, les encadrants et le responsable du M1 veillent à ce que ceux-ci se répartissent sur l'ensemble des projets avec au maximum trois étudiants par sujet.

Les sujets proposés doivent porter sur des questions de niveau L3 à M1.

Chaque étudiant doit

- ☐ **Faire au moins trois exposés devant son encadrant au cours de la préparation de son projet.**
- ☐ **Rédiger un document relatif à son sujet et l'écrire en Latex qui doit être corrigé par l'encadrant.**
- ☐ **Déposer une version définitive du mémoire au près de la direction du département.**
- ☐ **Soutenir son mémoire en présence de tous les étudiants devant un jury composé présidé par le coordinateur du master d'au moins deux enseignants.**

Contenu des programmes des unités au choix en M1

Parcours :Mathématiques Fondamentales

Chaque année, la commission de master choisit les unités d'enseignement UE5 et UE6 de la liste suivante :

- ***Equations différentielles et systèmes dynamiques.***
- ***Processus stochastiques.***
- ***Théorie de Galois.***
- ***Programmation scientifique.***
- ***Eventuellement, une autre unité (intitulé et programme) proposée par la commission de Master.***

Equations différentielles et systèmes dynamiques

(Unité au choix pour la commission de Master)

(3h cours et 3h TD)(Semestre 8)

Objectifs : Développer les énoncés principaux intervenant dans l’étude des équations différentielles ordinaires et présenter quelques concepts fondamentaux des systèmes dynamiques (conjugaison, orbite périodique, récurrente, ensemble-limite, ensemble minimal, stabilité, etc.). C'est l'occasion aussi de revisiter de nombreuses notions en topologie, algèbre linéaire, calcul différentiel, etc.

UF	EQUATIONS DIFFERENELLLE ET SYSTEMES DYNAMIQUES : Semestre 8		Nbre Heures Cours
1	Rappels sur les équations différentielles.		
	1.1	Équations différentielles : définitions et exemples.	
	1.2	Notion de solution locale.	
	1.3	Théorème d'existence et d'unicité.	
	1.4	Solutions maximales.	
	1.5	Solutions globales (critères d’extension).	
2	Équations différentielles linéaires.		
	2.1	Résolvantes.	
	2.2	Wronskien.	

	2.3	**Théorème de Liouville.**	

2.4	**Variation de la constante.**
2.5	**Résolution explicite dans le cas des coefficients constants.**

3 Systèmes dynamiques.

3.1	**Propriétés locales.**
	Généralités: champs de vecteurs et flot d'une équation différentielle autonome.
	Point singulier, orbite, équivalence et conjugaison de deux champs de vecteurs.
	Quelques propriétés générales des flots (théorème de redressement), exemples de flots.
	Stabilité des points singuliers au sens de Lyapunov.
	Fonction de Lyapunov. Linéarisation au voisinage des points singuliers hyperboliques.
	Théorème de Grobman-Hartman, cas des systèmes dynamiques linéaires dans le plan.
3.2	**Propriétés globales.**
	Ensembles-limites, orbite périodique, récurrente, ensemble-limite dans le plan.
	Section globale, application de Poincaré, suspension d'un difféomorphisme, champs de vecteurs au voisinage d'une orbite périodique; cas d'une surface.
	Théorie de Poincaré-Bendixson: Théorème de Jordan.

	Théorème de Poincaré-Bendixson et applications aux cas de la sphère et de la couronne.

Processus stochastiques (Unité au choix pour la commission de Master)

(3h cours et 3h TD) (Semestre 8)

UF	PROCESSUS STOCHASTIQUES : Semestre 8		Nbre Heures Cours
1	Rappel : Espérance conditionnelle.		03H
2	Notion de processus.		15H
	2.1	Théorie classique des martingales à temps discret : sous et sur-martingales.	
	2.2	Théorème d'arrêt et théorème de Hunt.	
	2.3	Théorèmes de convergence (en particulier : théorème de Doob pour les martingales bornées dans L^1.	
3	Théorie des chaînes de Markov à espace d'états dénombrable.		12H
	3.1	Propriété de Markov, propriété de Markov forte.	
	3.2	Etude asymptotique : lois invariantes, réversibles, états transients, récurrents, récurrents positifs.	
	3.3	Théorème de convergence en loi, théorème de convergence des moyennes ergodiques.	
4	Processus stochastique à temps continu.		06H
	4.1	Mouvements Brownien.	
	4.2	Processus de poisson.	

5	Compléments sur la simulation de processus aléatoires. TP sur Machines.	06H

Théorie de Galois (Unité au choix pour la commission de Master)

(3h cours et 3h TD) (Semestre 8)

UF	THEORIE DE GALOIS : Semestre 8		Nbre Heures Cours
1	Extension de corps.		15H
	1.1	Degré.	
	1.2	Élément algébrique, transcendant.	
	1.3	Somme et produit d'éléments algébriques.	
	1.4	Extensions algébriques, transcendantes.	
2	Corps de rupture, corps de décomposition, corps finis.		06H
3	Racines de l'unité, polynômes cyclotomiques (irréductibilité), corps cyclotomiques.		
4	Clôture algébrique. Le corps C est algébriquement clos.		
5	Extensions normales, Clôture normale, Extensions séparables, Degré de séparabilité, Clôture séparable, Extensions galoisiennes, Lemme d'Artin.		
6	Théorème de l'élément primitif (pour les extensions séparables finies).		
7	Correspondance de Galois (pour les extensions galoisiennes finies). Exemples de calculs de groupes de Galois.		
	Applications : résolution des équations par radicaux, constructibilité à la règle et au		

8	compas (caractérisation des nombres constructibles, caractérisation des polygones constructibles).		

Programmation scientifique (Unité au choix pour la commission de Master) 3h cours et 3h TD sur machine

Objectif : Introduction à la programmation scientifique en langage C pour la résolution de problèmes mathématiques simples (par exemple : recherche de nombres premiers, résolution d'équations non linéaires, quadratures, résolution d'équations différentielles ordinaires).

Savoir-faire : connaissances de base nécessaires sur le fonctionnement des ordinateurs pour leur utilisation efficace en simulation numérique, traduction d'algorithmes en codes informatiques, mise en œuvre de méthodes numériques pour la résolution de problèmes physiques simples, validation des résultats, combinaison des notions acquises pour la résolution de problèmes plus complexes.

UF	PROGRAMMATION SCIENTIFIQUE : Semestre 8		Nbre Heures Cours
1	Introduction à la programmation scientifique.		
	1.1	Enjeux.	
	1.2	Outils.	
	1.3	Etat de l'art.	
	1.4	Extensions algébriques, transcendantes.	
2	Langage C.		
	2.1	Généralités (historique, structure d'un programme, règles de base).	
	2.2	Types de données, tableaux, pointeurs, fonctions, entrées/sorties.	
	2.3	Opérateurs binaires et unaires bit à bit (décalage du registre à droite, à gauche, xor, et bit à bit, non logique).	
	2.4	Headers, Structure, Matrices, Gestion de la mémoire (allocation dynamique).	
3	Développement de programmes pour la résolution de problèmes numériques de difficulté croissante.		
4	Application à l'intégration d'équations différentielles modélisant des systèmes		

	mécaniques et des phénomènes physiques.	
5	**Développement d’un programme comprenant plusieurs modules.**	
6	**Sensibilisation à la qualité logicielle et à l'optimisation.**	
7	**Projets.**	

M2

Parcours : Mathématiques Fondamentales

Les unités d'enseignement du semestre 9 sont fixées par chaque commission de Master suivant la ou les spécialités qu'elle propose au début de chaque année.
Une unité d'enseignement peut être constituée d'un seul élément ou de plusieurs.

Le semestre 10 est consacré à l'initiation à la recherche et la préparation d'un mémoire de recherche.

Contenu des programmes des unités obligatoires en M1

Parcours :Mathématiques et applications

Topologie et analyse fonctionnelle **(Unité obligatoire)**

3h C, 3h TD (Semestre 7)

UF	TOPOLOGIE ET ANALYSE FONCTIONNELLLE : Semestre 7		Nbre Heures Cours
1	Espaces vectoriels normés - espaces de Banach.		03H
	1.1	Espaces vectoriels normés.	
	1.2	Applications linéaires continues sur les espaces vectoriels normés.	
	1.3	Espace de Banach.	
	1.4	Histoire de dimension.	
	1.5	Résultat de compacité : Théorème d'Arzelà-Ascoli.	
2	Espaces de Hilbert.		06H
	2.1	Définitions et premières propriétés.	
	2.2	Théorèmes de projection et applications.	
	2.3	Bases hilbertiennes.	

	2.4	Exemples de bases hilbertiennes.	
	2.5	Histoire de convergence.	
3	Les théorèmes de Hahn-Banach.		12H
	3.1	Lemme de Zorn.	
	3.2	Forme analytique du théorème de Hahn-Banach.	
	3.3	Formes linéaires continues, espace dual.	

	3.4	Forme géométrique du théorème de Hahn-Banach.	
4	Le théorème de Baire et quelques applications.		12H
	4.1	Théorème de Baire.	
	4.2	Théorème de Banach-Steinhaus.	
	4.3	Théorèmes de l’application ouverte, de Banach.	
	4.4	Théorème du graphe fermé.	
5	Les espaces de Sobolev H^1 et $H^1 0$ et formulations variationnelles de quelques problèmes aux limites en dimension 1.		09H
	5.1	L’espace H^1.	
	5.2	L’espace $H^1 0$.	
	5.3	Un exemple de problème aux limites.	

Unité transversale : Introduction à Python (Unité obligatoire)

2h CI sur machine(Semestre 7)

UT	INTRODUCTION A PYTHON : Semestres 7		Nbre Heures Cours
1	Introduction.		09H
	1.1	Notion d'algorithme.	
	1.2	Opérations élémentaires, Structures conditionnelles, Structures itératives, tableau à une dimension et tableau à deux dimensions.	
	1.3	Notion de coût d'un algorithme et classes de complexité. Travaux Dirigés Applications introduisant la notion de coût d'un algorithme.	
2	Environnement de développement Python.		09H
	2.1	Historique et raisons du choix du langage.	
	2.2	Mode interactif, mode Script, Aide en ligne.	
	2.3	Types élémentaires (classes int, str, float, bool, complex).	
	2.4	Opérations élémentaires sur les différents types élémentaires (approche classique/ approche orientée objet).	
	2.5	Notion de bibliothèque et import des packages prédéfinis (fonctions de bibliothèque).	
	2.6	Instructions élémentaires.	
	2.7	Structures conditionnelles.	

	2.8	**Structures itératives.**	
	2.9	**Présentation des types composés : les types mutables (listes, dictionnaires, ensembles) et non mutables .**	

3	**Les sous programmes en algorithmique.**		**12H**
	3.1	**Fonctions et procédures.**	
	3.2	**Passage de paramètres (Entrée, Sortie, E/S).**	
	3.3	**Variables locales et Variables globales. Chapitre IV : Les fonctions en Python.**	
4	**Les fonctions en Python.**		**12H**
	4.1	**Définition de fonctions par : déf, lambda**	
	4.2	**Variables locales et variables globales.**	
	4.3	**Notion de fonction locale.**	
	4.4	**Réutilisation de modules (import de fonctions).**	
	4.5	**Gestion des erreurs (bloc Try... Except).**	
	4.6	**Documentation des fonctions.**	
	4.7	**Coût de fonctions et classes de complexité.**	

Chapitre 1: Travaux Dirigés : Applications introduisant la notion de coût d'un algorithme.

Chapitre 2 Travaux Dirigés : Instructions de calculs (opérations arithmétiques, calculs avec import de fonctions prédéfinis,…) en mode interactif (mode console). Ecrire et exécuter des programmes (en utilisant des instructions élémentaires, des structures conditionnelles et des structures itératives) en mode script. Manipulation des types mutables et non mutables.

Remarque : Les parties algorithmiques et programmation seront enseignées en parallèle. A chaque notion algorithmique on associera son équivalent Python.

Acquis : Maîtriser l'environnement Python. − Connaître l'allocation dynamique de la mémoire. − Savoir différencier entre les types mutables et non mutables en important le module copy. − Savoir calculer le coût d'un algorithme et différencier les classes de complexité (linéaire, quadratique, logarithmique, quasi-linéaire, exponentielle...).

Chapitre 4 : Travaux Dirigés : (Programmation Python) Exercices d'Arithmétiques, nombres premiers, nombres parfaits, nombres amis, calcul de PGCD, PPCM, multiplication égyptienne.

Acquis : Savoir écrire un programme itératif. − Maîtriser la programmation modulaire.

Unité transversale : Projet : Etude de textes Mathématiques (Unité obligatoire)

2h TD par projet (Semestre 8)

Choix des projets

Une liste de sujets de projets est proposée aux étudiants au début du premier semestre (le nombre exact est ajusté à la rentrée en fonction des effectifs présents).

La liste des projets est arrêtée au début du premier semestre par la commission du Master.

Les étudiants choisissent leur projet avant la fin du premier semestre, les encadrants et le responsable du M1 veillent à ce que ceux-ci se répartissent sur l'ensemble des projets avec au maximum trois étudiants par sujet.

Les sujets proposés doivent porter sur des questions de niveau L3 à M1.

Chaque étudiant doit

- ☐ **Faire au moins trois exposés devant son encadrant au cours de la préparation de son projet.**
- ☐ **Rédiger un document relatif à son sujet et l'écrire en Latex qui doit être corrigé par l'encadrant.**
- ☐ **Déposer une version définitive du mémoire au près de la direction du département.**
- ☐ **Soutenir son mémoire en présence de tous les étudiants devant un jury présidé par le coordinateur du master et composé d'au moins de deux enseignants.**

Contenu des programmes des unités obligatoires en M1

Parcours :Mathématiques et applications

Contenu des programmes des unités au choix en M1 Parcours

:Mathématiqueset applications

Chaque année, la commission de master peut choisir les unités d'enseignement non fixées par le CNS de la liste suivante :

- ***Analyse de Fourier et distributions.***
- ***Processus stochastiques.***
- ***Géométrie différentielle.***
- ***Equations différentielles et systèmes dynamiques.***
- ***Statistiques.***
- ***Modélisation et simulation numérique des phénomènes physiques***
- ***Programmation scientifique.***
- ***Eventuellement, une autre unité (intitulé et programme) proposée par la commission de Master.***

Analyse de Fourier et distributions

(3h cours et 3h TD)

UF	ANALYSE DE FOURIER ET DISTRIBUTIONS		Nbre Heures Cours
1	Convolution sur R^n.		
	1.1	Approximations de l'unité.	
	1.2	Régularisation.	
	1.3	Densité des fonctions C^∞ à support compact.	
	1.4	Espace de Schwartz.	
2	Transformation de Fourier.		
	2.1	Transformée de Fourier d'une fonction intégrable sur R^n et ses propriétés.	
	2.2	Transformation de Fourier dans S et dans L^2.	
	2.3	Théorème d'inversion et Formule de Plancherel.	
3	Distributions.		
	3.1	Définition et exemples.	
	3.2	Dérivée au sens des distributions.	
	3.3	Convergence au sens des distributions.	
	3.4	Multiplication d'une distribution et d'une fonction.	
	3.5	Support d'une distribution. Distributions à support compact.	
	3.6	Convolution des distributions.	

4	**Distributions tempérées.**	
5	**Transformée de Fourier d’une distribution tempérée.**	
6	**Application de l’analyse de Fourier aux équations aux dérivées partielles.**	

Processus stochastiques (unité obligatoire)

(3h cours et 3h TD)

UF		PROCESSUS STOCHASTIQUES :	Nbre Heures Cours
1		Rappel : Espérance conditionnelle.	15H
2		Notion de processus.	15H
	2.1	Théorie classique des martingales à temps discret : sous et sur-martingales.	
	2.2	Théorème d'arrêt et théorème de Hunt.	
	2.3	Théorèmes de convergence (en particulier : théorème de Doob pour les martingales bornées dans L^1.	
3		Théorie des chaînes de Markov à espace d'états dénombrable.	06H
	3.1	Propriété de Markov, propriété de Markov forte.	
	3.2	Etude asymptotique : lois invariantes, réversibles, états transients, récurrents, récurrents positifs.	
	3.3	Théorème de convergence en loi, théorème de convergence des moyennes ergodiques.	
4		Processus stochastique à temps continu.	06H
	3.1	Mouvements Brownien.	
	3.2	Processus de poisson.	
4		Compléments sur la simulation de processus aléatoires. TP sur Machines.	06H

Analyse convexe et optimisation (unité obligatoire)

(3h cours et 3h TD)

UF	ANALYSE CONVEXE ET OPTIMISATION		Nbre Heures Cours
1	Ensembles convexes.		03H
	1.1	Propriétés topologiques et algébriques.	
	1.2	Combinaisons convexes, Enveloppes convexes. Points extrémaux.	
	1.3	Cônes convexes.	
2	Fonctions convexes.		06H
	2.1	Fonctions convexes, strictement convexes, fortement convexes.	
	2.2	Caractérisation d’une fonction convexe par son épigraphe.	
	2.3	Propriétés élémentaires algébriques.	
	2.4	Continuité des fonctions convexes.	
	2.5	Semi continuité inférieure (caractérisation par l’épigraphe).	
	2.6	Caractérisation d’une fonction convexe par ses dérivées première et seconde.	
3	Théorèmes d’existence d’optimum.		09H
	3.1	Cas de la dimension finie.	
	3.2	Cas de la dimension infinie dans les espaces de Hilbert.	
4	Conditions d’optimalité. Cônes tangent et normal.		12H
	4.1	Cônes tangent et normal.	

	4.2	**Conditions nécessaires d'optimalité du premier ordre. Le cas convexe.**	
	4.3	**Cas sans contraintes condition nécessaire et condition nécessaire et suffisante d'optimalité.**	
	4.4	**Cas avec contraintes d'égalité.**	
		□□Le cône tangent.	
		□□Condition nécessaire du premier ordre. Existence de multiplicateurs de Lagrange en dimension finie.	
	4.5	**Cas des contraintes d'inégalité.**	
		Qualification des contraintes.	
		Le cône tangent.	
		Les conditions de Karush-Kuhn et Tucker.	
5	**Algorithmes d'optimisation.**		**12H**
	5.1	**Cas sans contrainte.**	
		□□Gradient à pas fixe.	
		□□Gradient à pas optimal.	
		□□Gradient conjugué.	
	5.2	**Cas avec contrainte.**	
		□□Méthode du gradient projeté	
		□□Méthodes de pénalisation.	

Géométrie différentielle (Unité obligatoire)

(3h cours et 3h TD)

UF		GEOMETRIE DIFFERENTIELLLE	Nbre Heures Cours
1		Rappels : Théorème du rang constant pour une fonction de classe C^∞ définie sur un ouvert de R^n.	03H
2		Sous-variétés de R^n.	15H
	2.1	Différentes caractérisations locales.	
	2.2	Exemples.	
	2.3	Paramétrisation, changement de cartes ou de paramétrisations.	
	2.4	Fonctions sur une sous-variété.	
	2.5	Espace tangent en un point.	
	2.6	Application linéaire tangente.	
	2.7	Rang, Immersions, Submersions, Théorème du rang.	
	2.8	Théorème d'inversion locale.	
	2.9	Fibré tangent.	
3		Champs de vecteurs C^∞.	15H
	3.1	Action d'un champ de vecteurs sur une fonction C^∞.	

	3.2	**Dérivations et champs de vecteurs.**	
	3.3	**Crochet de deux champs de vecteurs, identité de Jacobi.**	
	3.4	**Champs de vecteurs invariants par un difféomorphisme.**	
4	**Fibré cotangent.**		**09H**
	4.1	**Formes différentielles sur une sous-variété de R^n.**	
	4.2	**Orientation, intégration sur les sous-variétés orientables.**	

Equations différentielles et systèmes dynamiques

(Unité au choix pour la commission de Master)

(3h cours et 3h TD)

Objectifs : **Développer les énoncés principaux intervenant dans l'étude des équations différentielles ordinaires et présenter quelques concepts fondamentaux des systèmes dynamiques (conjugaison, orbite périodique, récurrente, ensemble-limite, ensemble minimal, stabilité, etc.). C'est l'occasion aussi de revisiter de nombreuses notions en topologie, algèbre linéaire, calcul différentiel, etc.**

UF		EQUATIONS DIFFERENELLLE ET SYSTEMES DYNAMIQUES	Nbre Heures Cours
1	**Rappels sur les équations différentielles.**		
	1.1	**Équations différentielles : définitions et exemples.**	
	1.2	**Notion de solution locale,**	
	1.3	**Théorème d'existence et d'unicité.**	
	1.4	**solutions maximales.**	
	1.5	**Solutions globales (critères d'extension).**	
2	**Équations différentielles linéaires.**		
	2.1	**Résolvantes.**	
	2.2	**Wronskien.**	
	2.3	**Théorème de Liouville.**	

	2.4	**Variation de la constante.**	
	2.5	**Résolution explicite dans le cas des coefficients constants.**	
3	**Systèmes dynamiques.**		
	3.1	**Propriétés locales.**	
		Généralités: champs de vecteurs et flot d'une équation différentielle autonome.	
		Point singulier, orbite, équivalence et conjugaison de deux champs de vecteurs.	
		Quelques propriétés générales des flots (théorème de redressement), exemples de flots.	
		Stabilité des points singuliers au sens de Lyapunov.	
		Fonction de Lyapunov. Linéarisation au voisinage des points singuliers hyperboliques.	
		Théorème de Grobman-Hartman, cas des systèmes dynamiques linéaires dans le plan.	
	3.2	**Propriétés globales.**	
		Ensembles-limites, orbite périodique, récurrente, ensemble-limite dans le plan.	
		Section globale, application de Poincaré, suspension d'un difféomorphisme, champs de vecteurs au voisinage d'une orbite périodique; cas d'une surface.	
		Théorie de Poincaré-Bendixson: Théorème de Jordan.	
		Théorème de Poincaré-Bendixson et applications aux cas de la sphère et de la couronne.	

Statistiques

(3h cours et 3h TD)

UF		STATISTIQUES	Nbre Heures Cours
1	Modélisation Statistique.		
	1.1	Introduction.	
	1.2	Modèle statistique paramétrique.	
	1.3	Modèle d'échantillonnage et Vraisemblance.	
	1.4	Familles Exponentielles.	
2	Théorie de l'estimation.		
	2.1	Construction d'estimateurs :	
		□□Construction d'estimateur par la méthode de contraste EMV.	
		□□Construction d'estimateur par la méthode des moments EMM.	
		□□Construction d'estimateur par la méthode du maximum de vraisemblance.	
	2.2	Qualité d'un estimateur :	
		□□Estimateur sans biais.	
		□□Estimateur convergent.	
		□□Risque quadratique d'un estimateur.	
		□□Information de Fisher.	

		□□Inégalité de Rao-Cramer.	
	2.3	Estimation par intervalle de confiance.	
	2.4	Amélioration d'estimateurs.	
		□□Statistique exhaustive.	
		□□Statistique Complète.	
3	Construction d'estimateur par la méthode des moindres carrés.		
	3.1	Modèle de Régression linéaire simple.	
	3.2	Modèle de Régression linéaire multivariée :	
		□□Estimation de θ par la méthode des□moindres carrés ordinaires.	
		□□Interprétation géométrique de la méthode des moindres carrés.	
		□□Propriétés statistiques de la méthode des moindres carrés.	
		□□Régression linéaire normale.	
		□□Valeurs ajustées et résidus calculés.	
4	Statistique Bayésienne.		
	4.1	Modèle bayésien.	
	4.2	Choix de la loi a priori.	
	4.3	Risque de Bayes et estimateur bayésien.	
5	Test d’hypothèses.		
	5.1	Test Chi-deux, Test de Kolmogrov-Smirnov, Test sur la moyenne, Test sur la variance, Test du rapport de vraisemblance.	
	5.2	Notion de p-valeur, Notion de puissance.	

Modélisation et simulation numérique des phénomènes physiques
(3h cours et 3h TD sur machine)

Objectifs : savoir modéliser des phénomènes physiques classiques à l'aide d'équations aux dérivées partielles, poser le problème mathématique correspondant, résoudre numériquement les problèmes d'équations aux dérivées partielles obtenus.

UF	EQUATIONS DIFFERENELLLE ET SYSTEMES DYNAMIQUES		Nbre Heures Cours
1	Introduction aux modèles fondamentaux.		
	1.1	Stationnaires (équation de Laplace).	
	1.2	Propagatifs (transport, ondes).	
	1.3	Diffusifs (chaleur).	
2	L'équation de Laplace en dimension 2.		
	2.1	Formulation variationnelle pour différents problèmes aux limites.	
	2.2	Utilisation du théorème de Lax-Milgram.	
	2.3	Méthodes des éléments finis.	
3	L'équation de transport en dimension 1 d'espace.		
	3.1	Méthode des caractéristiques.	
	3.2	Différences finies.	

Programmation scientifique

(3h cours et 3h TD sur machine)

- ☐ **Objectif : Introduction à la programmation scientifique en langage C pour la résolution de problèmes mathématiques simples (par exemple : recherche de nombres premiers, résolution d'équations non linéaires, quadratures, résolution d'équations différentielles ordinaires).**
- ☐ **Savoir-faire : connaissances de base nécessaires sur le fonctionnement des ordinateurs pour leur utilisation efficace en simulation numérique ; traduction d'algorithmes en codes informatiques ; mise en oeuvre de méthodes numériques pour la résolution de problèmes physiques simples ; validation des résultats ; combinaison des notions acquises pour la résolution de problèmes plus complexes.**

UF	PROGRAMMATION SCIENTIFIQUE		Nbre Heures Cours
1	**Introduction à la programmation scientifique.**		
	1.1	**Enjeux.**	
	1.2	**Outils.**	
	1.3	**Etat de l'art.**	
	1.4	**Extensions algébriques, transcendantes.**	
2	**Langage C.**		
	2.1	**Généralités (historique, structure d'un programme, règles de base).**	
	2.2	**Types de données, tableaux, pointeurs, fonctions, entrées/sorties.**	
	2.3	**Opérateurs binaires et unaires bit à bit (décalage du registre à droite, à gauche, xor, et bit à bit, non logique).**	
	2.4	**Headers, Structure, Matrices, Gestion de la mémoire (allocation dynamique).**	
3	**Développement de programmes pour la résolution de problèmes numériques de difficulté croissante.**		
4	**Application à l'intégration d'équations différentielles modélisant des systèmes mécaniques et des phénomènes physiques.**		
5	**Développement d'un programme comprenant plusieurs modules.**		
6	**Sensibilisation à la qualité logicielle et à l'optimisation.**		
7	**Projets.**		

M2

Parcours : Mathématiques et Applications

Les unités d’enseignement du semestre 9 sont fixées par chaque commission de Master suivant la ou les spécialités qu’elle propose au début de chaque année.
Une unité d’enseignement peut être constituée d’un seul élément ou de plusieurs.

Le semestre 10 est consacré à l’initiation à la recherche et la préparation d’un mémoire de recherche.

S9 Unité transversale : Python 2 (Unité obligatoire)

2h Cours sur machine

UF		PYTHON 2 : Semestre 9	Nbre Heures Cours
1	Rappel général du langage de programmation Python.		
	1.1	La syntaxe de base.	
	1.2	Les principaux types et structures de données.	
	1.3	Modules et Fonctions prédéfinies.	
	1.5	Solutions globales (critères d'extension).	
2	Simulation numérique.		
	2.1	Présentation de la bibliothèque numpy : - Définition et Manipulation des matrices. - Utilisation de l'ensemble de fonctions de l'algèbre linéaire. - Statistique descriptive et simulation de lois.	
	2.2	Le module matplotlib : Traçage de graphiques	
	2.3	Le module scipy : - Méthodes de résolutions approchées d'équations du type f(x)=0. - Méthode de Newton, la dichotomie et la méthode de la sécante. - Résolutions approchées des équations et des systèmes d'équations différentielles. - La méthode d'Euler et les méthodes de Runge-Kutta. - Méthodes d'intégrations numériques. - Méthode des rectangles, Méthode des trapèzes, Méthode de Simpson.	

3	Résolution de Problèmes.		
	3.1	Algèbre linéaire: Calcul matriciel, méthode de pivot de Gauss, Décomposition LU.	
	3.2	Cryptographie: Cryptage de César, cryptage de Vigénère, méthode RSA.	
	3.3	Traitement d'image : La bibliothèque PIL, manipulations simples (inversion, symétrie, rotation, fusion,…).	
	3.4	Problèmes d'interpolations: Interpolation de Lagrange.	
4	Résolution des EDP.		
	4.1	Simulation numérique des EDP.	
	4.2	Méthodes numérique pour la résolution d'EDP : Différences finies, élément finis, volumes finis, Méthode spectrale, Méthode Monte-Carlo.	
	4.3	Résolution des ED stochastique : Modèle de Black &Scholes, Mouvement Brownien.	