République Tunisienne

Ministère de L'**E**nseignement **S**upérieur, de la **R**echerche **S**cientifique et des technologies de l'information et de la communication

Commission sectorielle de Mathématiques

Licence Fondamentale de Mathématiques

Juillet 2016

Licence Fondamentale de Mathématiques Semestre1

Unité d'Enseignement(UE)		Elément Constitutif d'UE (ECUE)	Volume horaire (semaine)				Crédits		Coefficients		Régime d'Examen	
			Cours	T.D.	T.P.	C.I.	ECUE	UE	ECUE	UE	Contrôle Continu	Régime Mixte
UF-1	**Analyse**	Analyse1				6 *		**7**		**5**		**X Durée 2h**
UF-2	**Algèbre**	Algebre1				6 *		**7**		**5**		**X Durée 2h**
UF-3	**Informatique**	Algorithmique et programmation en langage C			2	3		**6**		**3**		**X Durée 2h**
UT-4	**Transversale**	Anglais1		**1,5**			**2**	**6**	**1**	**3**	**X**	
		Droit de l'Homme1	**1.5**				**2**		**1**		**X**	
		Préparation C2I-1		**1,5**			**2**		**1**		**X**	
UO1	**Optionnelle**	Fixée par le département	**2**					**4**		**2**		**X Durée 1h30**
Total : 23.5 h / semaine			**3.5**	**3**	**2**	**15**		**30**		**18**		

* : ou bien 3h cours + 3h TD si l'institution n'a pas les moyens pour les assurer en CI

Licence Fondamentale de Mathématiques Semestre 2

Unité d'Enseignement(UE)		Elément Constitutif d'UE (ECUE)	Volume horaire (semaine)				Crédits		Coefficients		Régime d'Examen	
			Cours	T.D.	T.P.	C.I.	ECUE	UE	ECUE	UE	Contrôle Continu	Régime Mixte
UF-4	**Analyse**	Analyse2				6 *		**7**		**5**		**X Durée 2h**
UF-5	**Algèbre**	Algèbre2				6 *		**7**		**5**		**X Durée 2h**
UF-6	**Physique**	Mécanique1	2	3				**6**		**3**		**X Durée 2h**
UT-2	**Transversale**	Anglais 2		**1,5**			**2**	**6**	**1**	**3**	**X**	
		Droitdel'Homme2	**1.5**				**2**		**1**		**X**	
		PréparationC2I-2		**1.5**			**2**		**1**		**X**	
UO 2	**Optionnelle**	Fixée par le département	**2**					**4**		**2**		**X Durée 1h30**
Total : 23.5 h / semaine			**5,5**	**6**		**12**		**30**		**18**		

* : ou bien 3h cours + 3h TD si l'institution n'a pas les moyens pour les assurer en CI

Licence Fondamentale de Mathématiques Semestre3

Unité d'Enseignement(UE)		Elément Constitutif d'UE (ECUE)	Volume horaire (semaine)				Crédits		Coefficients		Régime d'Examen	
			Cours	T.D.	T.P.	C.I.	ECUE	UE	ECUE	UE	Contrôle Continu	Régime Mixte
UF-4	Analyse	Analyse 3				6 *		7		5		X Durée 2h
UF-5	Algèbre	Algèbre 3				6 *		7		5		X Durée 2h
UF-6	Physique	Mécanique2	2	3				6		3		X Durée 2h
UT-2	Transversale	Anglais 3		1.5			3	6	1.5	3	X	
		Initiation au calcul scientifique 1		1,5 (sur machine)			3		1.5		X	
UO 2	Optionnelle	Fixée par le département	2					4		2		X Durée 1h30
Total : 21.5 h / semaine			4	6		12		30		18		

*** : ou bien 3h cours + 3h TD si l'institution n'a pas les moyens pour les assurer en CI.**

Licence Fondamentale de Mathématiques Semestre 4

Unité d'Enseignement(UE)		Elément Constitutif d'UE (ECUE)	Volume horaire (semaine)				Crédits		Coefficients		Régime d'Examen	
			Cours	T.D.	T.P.	C.I.	ECUE	UE	ECUE	UE	Contrôle Continu	Régime Mixte
UF-4	Analyse	Analyse 4				6 *		7		5		X Durée 2h
UF-5	Algèbre	Algèbre 4				6 *		7		5		X Durée 2h
UF-6	Informatique	Algorithmique2			2	3		6		3		X Durée 2h
UT-2	Transversale	Anglais 4		1.5			3	6	1.5	3	X	
		Initiation au calcul scientifique 2		1,5 (sur machine)			3		1.5		X	
UO 2	Optionnelle	Fixée par le département	2					4		2		X Durée 1h30
Total : 22 h / semaine			2	3	2	15		30		18		

*

*** : ou bien 3h cours + 3h TD si l'institution n'a pas les moyens pour les assurer en CI,**

Licence Fondamentale de Mathématiques, parcours : Mathématiques Semestre 5

Unité d'Enseignement(UE)		Eléments Constitutifs d'UE (ECUE)	Volume horaire (semaine)				Crédits		Coefficients		Régime d'Examen	
			Cours	T.D.	T.P.	C.I.	ECUE	UE	ECUE	UE	Contrôle Continu	Régime Mixte
UF-1	**Algèbre**	**Algèbre**				6 *		**7**		**5**		**X** **Durée 3h**
UF-2	**Calcul intégral**	**Calcul intégral**				6 *		**7**		**5**		**X** **Durée 3h**
UF-3	**Topologie**	**Topologie sur les espaces métriques**				6 *		**7**		**5**		**X** **Durée 3h**
UT-S5	**Transversale**	Anglais 5		**1.5**			2	5	**1.5**	**3**	**X**	
		Schémas numériques pour les EDO				**2 avec TD sur machine**	3		**1.5**		**X**	
UO-S5	**Optionnelle**	Fixée par le département	**2h (cours ou CI)**					**4**		**2**		**X** **Durée 1h30**
Total : 23.5 h / semaine			**2**	**1.5**		**20**		**30**		**20**		

*** : 6h de cours intégré ou bien (3h cours + 3h TD) .**

Licence Fondamentale de Mathématiques, parcours : Mathématiques — Semestre 6

Unité d'Enseignement(UE)		Eléments Constitutifs d'UE (ECUE)	Volume horaire (semaine)				Crédits		Coefficients		Régime d'Examen	
			Cours	T.D.	T.P.	C.I.	ECUE	UE	ECUE	UE	Contrôle Continu	Régime Mixte
UF-4	Calcul différentiel	Calcul différentiel				6 *		7		5		X Durée 3h
UF-5	Module 1	A fixer par le département parmi la liste ci-jointe				6 *		7		5		X Durée 3h
UF-6	Module 2	A fixer par le département parmi la liste ci-jointe				6 *		7		5		X Durée 3h
UT-S6	Transversale	Méthodologie		1.5			2	5	1.5	3	X	
		Statistiques				2	3		1.5		X	
UO-S6	Optionnelle	Fixée par le département	2h (cours ou CI)					4		2		X Durée 1h30
Total : 23,5 h / semaine			2	1.5		20		30		20		

*** : 6h de cours intégré ou bien (3h cours + 3h TD) .**

Licence Fondamentale de Mathématiques, parcours : Mathématiques et applications Semestre 5

Unité d'Enseignement(UE)		Elément Constitutif d'UE (ECUE)	Volume horaire (semaine)				Crédits		Coefficients		Régime d'Examen	
			Cours	T.D.	T.P.	C.I.	ECUE	UE	ECUE	UE	Contrôle Continu	Régime Mixte
UF-1	**Calcul différentiel**	**Calcul différentiel**				6 *		**7**		**5**		**X Durée 3h**
UF-2	**Calcul intégral**	**Calcul intégral**				6 *		**7**		**5**		**X Durée 3h**
UF-3	**Topologie**	**Topologie dans les espaces métriques**				6 *		**7**		**5**		**X Durée 3h**
UT-S5	**Transversale**	Anglais 5		**1.5**			2	5	**1.5**	**3**	**X**	
		Schémas numériques pour les EDO				2h avec TD sur machine	3		**1.5**		**X**	
UO-S5	**Optionnelle**	Fixée par le département	**2h (cours ou CI)**					**4**		**2**		**X Durée 1h30**
Total : 23,5 h / semaine			**2**	**1.5**		**20**		**30**		**20**		

*** : 6h de cours intégré ou bien (3h cours + 3h TD) .**

Licence Fondamentale de Mathématiques, parcours : Mathématiques et applications — Semestre 6

Unité d'Enseignement(UE)		Eléments Constitutifs d'UE (ECUE)	Volume horaire (semaine)				Crédits		Coefficients		Régime d'Examen	
			Cours	T.D.	T.P.	C.I.	ECUE	UE	ECUE	UE	Contrôle Continu	Régime Mixte
UF-4	Analyse numérique	Analyse numérique				6 *		7		5		X Durée 3h
UF-5	Module 1	A fixer par le département parmi la liste ci-jointe				6 *		7		5		X Durée 3h
UF-6	Module 2	A fixer par le département parmi la liste ci-jointe				6 *		7		5		X Durée 3h
UT-S6	Transversale	Méthodologie		1.5			2	5	1.5	3	X	
		Statistiques				2	3		1.5		X	
UO –S6	Optionnelle	Fixé par le département	2 (cours ou CI)					4		2		X Durée 1h30
Total : 23,5 h / semaine			2	1.5		20		30		20		

*** : 6h de cours intégré ou bien (3h cours + 3h TD) .**

PROGRAMMES

L_1

Licence de mathématiques
Programme des unités d'enseignement de L1

Table des matières

1 ALGEBRE 1

Le programme du premier semestre est conçu de façon à atteidre trois objectifs majeurs :

- assurer la progressivité du passage aux études supérieures, en tenant compte des programmes du secondaire, dont il consolide et élargit les acquis ;
- consolider la formation des étudiants dans les domaines de la logique, du raisonnement et des techniques de calcul,qui sont des outils indispensables tant aux mathématiques qu'aux autres disciplines scientfiques ;
- présenter des notions nouvelles riches, de manière à susciter l'intérêt des étudiants.

  Il est à noter que les différents points de vocabulaire, notations et raisonnement nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique doivent être introduites **de manière progressive** en vue d'être acquises et maîtrisées en fin de premier semestre, et cela dans les deux parties : analyse et algèbre. Ces points sont les suivants :

- L'emploi des quantificateurs (sans que cela soit en guise d'abréviations) , implication, contraposition, équivalence, négation d'une proposition.
- Modes de raisonnement : par récurrence (faible et forte), par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.

Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme.
Le volume horaire proposé pour chaque chapitre est approximatif et concerne le temps alloué au cours intégré (cours, applications et exercices corrigés (T.D)).

1.1 Nombres complexes et trigonométrie (12 heures)

L'objectif de ce chapitre est de consolider et d'approfondir les notions sur les nombres complexes acquises au secondaire. Le programme combine les aspects suivants :

- l'étude algébrique du corps $\mathbb{C}$, équations algébriques (équations du second degré, racines n-ièmes d'un nombre complexe) ;
- l'interprétation géométrique des nombres complexes et l'utilisation des nombres complexes en géométrie plane ;
- l'exponentielle complexe et ses applications à la trigonométrie.

Il est recommandé d'illustrer le cours par de nombreuses figures et d'insister sur l'aspect géométrique.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Nombres complexes	
Parties réelle et imaginaire. Opérations sur les nombres complexes. Conjugaison, compatibilité avec les opérations.	La construction de $\mathbb{C}$ n'est pas exigible.
Point du plan associé à un nombre complexe, affixe d'un point, affixe d'un vecteur.	On identifie $\mathbb{C}$ au plan usuel muni d'un repère orthonormé direct.
Module	
Module. Relation $\lvert z\rvert^2 = z\overline{z}$, module d'un produit, d'un quotient. Inégalité triangulaire, cas d'égalité.	Interprétation géométrique de $\lvert z - z'\rvert$, cercles et disques.
Nombres complexes de module 1 et trigonométrie	
Cercle trigonométrique. Paramétrisation par les fonctions circulaires.	Notation $\mathbb{U}$. Les étudiants doivent savoir retrouver les formules du type $\cos(\pi - x) = -\cos x$ et résoudre des équations et inéquations trigonométriques en s'aidant du cercle trigonométrique.
Définition de $e^{\mathrm{i}t}$ pour $t \in \mathbb{R}$. Exponentielle d'une somme.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Formules de trigonométrie exigibles : $\cos(a \pm b)$, $\sin(a \pm b)$, $\cos(2a)$, $\sin(2a)$, $\cos a \cos b$, $\sin a \cos b$, $\sin a \sin b$.	Les étudiants doivent savoir factoriser des expressions du type $\cos(p) + \cos(q)$.
Fonction tangente, fonction cotangente. Formule exigible : $\tan(a \pm b)$.	Notations tan et cotan.
Formules d'Euler.	Linéarisation, calcul de $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ et de $\sum_{k=0}^{n} \sin(kt)$.
Formule de Moivre.	Les étudiants doivent savoir retrouver les expressions de $\cos(nt)$ et $\sin(nt)$ en fonction de $\cos t$ et $\sin t$.

Formes trigonométriques

Forme trigonométrique $re^{i\theta}$ avec $r > 0$ d'un nombre complexe non nul. Arguments. Arguments d'un produit, d'un quotient. Factorisation de $1 \pm e^{it}$. Transformation de $a \cos t + b \sin t$ en $A \cos(t - \varphi)$.	Relation de congruence modulo 2π sur $\mathbb{R}$.

Equations du second degré

Résolution des équations du second degré dans $\mathbb{C}$.	Calcul des racines carrées d'un nombre complexe donné sous forme algébrique.
Somme et produit des racines.	

Racines n-ièmes

Description des racines n-ièmes de l'unité, d'un nombre complexe non nul donné sous forme trigonométrique.	Notation $\mathbb{U}_n$. Représentation géométrique.

Exponentielle complexe

Définition de e^z pour z complexe : $e^z = e^{\mathrm{Re}(z)} e^{i \mathrm{Im}(z)}$. Exponentielle d'une somme. Pour tous z et z' dans $\mathbb{C}$, $\exp(z) = \exp(z')$ si et seulement si $z - z' \in 2i\pi\mathbb{Z}$. Résolution de l'équation $\exp(z) = a$.	Notations $\exp(z), e^z$.

Interprétation géométrique des nombres complexes

Interprétation géométrique du module et de l'argument de $\dfrac{c-b}{c-a}$.	Traduction de l'alignement, de l'orthogonalité.
Interprétation géométrique des applications $z \mapsto az + b$.	Similitudes directes. Cas particuliers : translations, homothéties, rotations.
Interprétation géométrique de la conjugaison.	L'étude générale des similitudes indirectes est hors programme.

1.2 Calculs algébriques (4 heures)

Ce chapitre a pour but de présenter quelques notations et techniques fondamentales de calcul algébrique.

Contenus	Capacités & commentaires
Sommes et produits	
Somme et produit d'une famille finie de nombres complexes.	Notations $\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i\in I} a_i, \prod_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i\in I} a_i$. Sommes et produits télescopiques, exemples de changements d'indices et de regroupements de termes.
Expressions simplifiées de $\sum_{i=1}^{n} k, \sum_{i=1}^{n} k^2, \sum_{i=0}^{n} x^k$. Factorisation de $a^n - b^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Sommes doubles. Produit de deux sommes finies. Sommes triangulaires.	
Coefficients binomiaux et formule du binôme	
Factorielle. Coefficients binomiaux.	Notations C_n^p ou $\binom{n}{p}$.
Relation $\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$. Formule et triangle de Pascal. Formule du binôme dans $\mathbb{C}$.	
Systèmes linéaires	
Système linéaire de n équations à p inconnues à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Système homogène associé. Opérations élémentaires. Algorithme du pivot.	Interprétation géométrique : intersection de droites dans $\mathbb{R}^2$, de plans dans $\mathbb{R}^3$. Notations $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ($\lambda \neq 0$), $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$. En pratique, on se limitera au cas $n \leqslant 3$ et $p \leqslant 3$.

1.3 Arithmétique dans l'ensemble des entiers relatifs(12 heures)

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les propriétés de la divisibilité des entiers et des congruences.

Contenus	Capacités & commentaires
Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.	Caractérisation des couples d'entiers associés.
PGCD et algorithme d'Euclide	
PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul. Algorithme d'Euclide.	Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{N}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b. Notation $a \wedge b$. L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de $a \wedge b$. $a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de la divisibilité) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
Extension au cas de deux entiers relatifs. Relation de Bézout.	L'algorithme d'Euclide fournit une relation de Bézout. L'étude des idéaux de $\mathbb{Z}$ est hors programme.

Contenus	Capacités & Commentaires
PPCM.	Notation $a \vee b$. Relation entre PPCM et PGCD.

Entiers premiers entre eux

Couple d'entiers premiers entre eux.	
Théorème de Bézout.	Forme irréductible d'un rationnel.
Lemme de Gauss.	
PGCD d'un nombre fini d'entiers, relation de Bézout.	
Entiers premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Nombres premiers	
Nombre premier. L'ensemble des nombres premiers est infini. Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.	Crible d'Eratosthène.
Pour p premier, valuation p-adique.	Notation $v_p(n)$. Caractérisation de la divisibilité en termes de valuations p-adiques. Expressions du PGCD et du PPCM à l'aide des valuations p-adiques.
Congruences	
Relation de congruence modulo un entier sur $\mathbb{Z}$. Opérations sur les congruences : somme, produit. Petit théorème de Fermat.	Notation $a \equiv b[n]$.

1.4 vocabulaire ensembliste(12 heures)

Ce chapitre regroupe des notions d'algèbre générale relatives aux ensembles , applications et relations, dont la plupart ont été mises en place au lycée. Il s'agit de les consolider et de les structurer afin qu'elles soient maîtrisées par les étudiants à la fin du premier semestre.
Toute étude systématique de la théorie des ensembles est hors programme.

Contenus	Capacités & commentaires
Ensembles	
Ensemble, appartenance, inclusion. Sous-ensemble (ou partie).	Ensemble vide.
Opérations sur les parties d'un ensemble : réunion, intersection, différence, passage au complémentaire.	Notation $A \setminus B$ pour la différence et $E \setminus A$, $\overline{A}$ et $\complement_E^A$ pour le complémentaire.
Produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles.	
Ensemble des parties d'un ensemble.	Notation $\mathscr{P}(E)$.
Applications et relations	
Application d'un ensemble non vide dans un ensemble non vide. Graphe d'une application.	Une application de E dans F associe à tout élément de E un unique élément de F . Notations $\mathscr{F}(E,F)$ et F^E.
Famille indexée par un ensemble non vide.	
Fonction indicatrice d'une partie d'un ensemble.	Notation $\mathbb{1}_A$.
Restriction et prolongement.	Notation $f\|_A$.
Image directe.	Notation $f(A)$.
Image réciproque.	Notation $f^{-1}(B)$.
Composition. Injection, surjection. Composée de deux injections, de deux surjections. Bijection, réciproque. Composée de deux bijections, réciproque de la composée.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Relation binaire sur un ensemble. Relation d'équivalence, classes d'équivalence. Relations de congruence modulo un réel sur $\mathbb{R}$, modulo un entier sur $\mathbb{Z}$.Introduction de l'"ensemble quotient $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Relation d'ordre. Ordre partiel, total.(On se limitera aux définitions et à quelques exemples)	

1.5 Structures algébriques usuelles (8 heures)

Le programme, strictement limité au vocabulaire décrit ci-dessous, a pour objectif de permettre une présentation unifiée des exemples usuels. En particulier, l'étude de lois artificielles est exclue.
La notion de sous-groupe figure dans ce chapitre par commodité.

Contenus	Capacités & commentaires
Lois de composition internes	
Loi de composition interne. Associativité, commutativité, élément neutre, inversibilité, distributivité. Partie stable. Inversibilité et inverse du produit de deux éléments inversibles.	
Structure de groupe	
Groupe.	Notation x^n dans un groupe multiplicatif, nx dans un groupe additif. Exemples usuels : groupes additifs $\mathbb{Z}$,$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, groupes multiplicatifs $\mathbb{Q}^*, \mathbb{Q}^*_+, \mathbb{R}^*, \mathbb{R}^*_+, \mathbb{C}^*, \mathbb{U}, \mathbb{U}_n$.
Groupe des permutations d'un ensemble.	Notation S_X .
Sous-groupe : définition, caractérisation.	
Structures d'anneau et de corps	
Anneau, corps. Exemples usuels : $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.	Tout anneau est unitaire, tout corps est commutatif.
Calcul dans un anneau.	Relation $a^n - b^n$ et formule du binôme si a et b commutent.
Groupe des inversibles d'un anneau.	

1.6 Polynômes et fractions rationnelles (24 heures)

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les propriétés de base de ces objets formels et de les exploiter pour la résolution de problèmes portant sur les équations algébriques et les fonctions numériques.
L'arithmétique de $\mathbb{K}[X]$ est développée selon le plan déjà utilisé pour l'arithmétique de $\mathbb{Z}$, ce qui autorise un exposé allégé. D'autre part, le programme se limite au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Anneau des polynômes à une indéterminée	
Anneau $\mathbb{K}[X]$. La construction de $\mathbb{K}[X]$ n'est pas exigible.	
Notations $\sum_{i=0}^{d} a_i X^i$, $\sum_{i=0}^{+\infty} a_i X^i$.	
Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire.	Le degré du polynôme nul est $-\infty$.
Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n.	
Degré d'une somme, d'un produit.	Le produit de deux polynômes non nuls est non nul.
Composition.	
Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples.	Caractérisation des couples de polynômes associés.
Théorème de la division euclidienne.	
Fonctions polynomiales et racines	
Fonction polynomiale associée à un polynôme.	
Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.	
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.	Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.
Multiplicité d'une racine.	Si $P(\lambda) \neq 0$, λ est racine de P de multiplicité 0.
Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines.	Aucune connaissance spécifique sur le calcul des fonctions symétriques des racines n'est exigible.
Dérivation	
Dérivée formelle d'un polynôme.	Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz.	
Formule de Taylor polynomiale.	
Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.	
Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	
PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul.	Tout diviseur commun à A et B de degré maximal est appelé un PGCD de A et B.
Algorithme d'Euclide.	L'ensemble des diviseurs communs à A et B est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD. Tous les PGCD de A et B sont associés ; un seul est unitaire. On le note $A \wedge B$.
Relation de Bézout.	L'algorithme d'Euclide fournit une relation de Bézout. L'étude des idéaux de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme.
PPCM.	Le PPCM unitaire est noté $A \vee B$. Relation entre PPCM et PGCD.
Couple de polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout. Lemme de Gauss.	

Contenus	Capacités & Commentaires
PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.	
Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$	
Théorème de d'Alembert-Gauss. Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$. Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.	La démonstration est hors programme. Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités. Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
Formule d'interpolation de Lagrange	
Si $x_1, \ldots, x_n$ sont des éléments deux à deux distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1, \ldots, y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, il existe un et un seul $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que pour tout i : $P(x_i) = y_i$.	Expression de P. Description des polynômes Q tels que pour tout i : $Q(x_i) = y_i$.
Fractions rationnelles	
Corps $\mathbb{K}(X)$. Forme irréductible d'une fraction rationnelle. Fonction rationnelle. Degré, partie entière, zéros et pôles, multiplicités.	La construction de $\mathbb{K}(X)$ n'est pas exigible.
Décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$	
Existence et unicité de la décomposition en éléments simples sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.	La démonstration est hors programme. On évitera toute technicité excessive. Si λ est un pôle simple, coefficient de $\dfrac{1}{X-\lambda}$. Décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$.

2 ALGEBRE 2

Le programme du deuxième semestre en algèbre a pour objectif d'introduire les notions fondamentales relatives à l'algèbre linéaire et aux espaces préhilbertiens.
Dans tout le cours d'algèbre linéaire, le corps $\mathbb{K}$ est égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

2.1 Espaces vectoriels et applications linéaires

Les objectifs du chapitre « Espaces vectoriels et applications linéaires » sont les suivants :

- acquérir les notions de base relatives aux espaces vectoriels et à l'indépendance linéaire ;
- reconnaître les problèmes linéaires et les modéliser à l'aide des notions d'espace vectoriel et d'application linéaire ;
- définir la notion de dimension, qui interprète le nombre de degrés de liberté d'un problème linéaire ; il convient d'insister sur les méthodes de calcul de dimension, de faire apparaître que ces méthodes reposent sur deux types de représentations : paramétrisation linéaire d'un sous-espace, description d'un sous-espace par équations linéaires ;
- présenter un certain nombre de notions de géométrie affine, de manière à consolider et enrichir les acquis relatifs à la partie affine de la géométrie classique du plan et de l'espace.

Il convient de souligner, à l'aide de nombreuses figures, comment l'intuition géométrique permet d'interpréter en petite dimension les notions de l'algèbre linéaire, ce qui facilite leur extension à la dimension quelconque.

2.1.1 Espaces vectoriels(12 heures)

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$ espace vectoriel.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$. On pourra introduire la notion d'espace vectoriel sur des exemples simples : $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}_2[X]$, $\mathbb{R}_3[X]$.
Produit d'un nombre fini d'espaces vectoriels.	
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ des suites d'éléments de $\mathbb{K}$.
Combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	
Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. Sous-espaces $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une partie X .	Notations $\text{Vect}(X)$, $\text{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace contenant X contient $\text{Vect}(X)$.
Familles de vecteurs	
Familles et parties génératrices. Familles et parties libres, liées.	
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$.
Somme d'un nombre fini de sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces.	
Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection.	La somme $F+G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F+G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique.
Sous-espaces supplémentaires. Somme d'un nombre fini de sous-espaces.	
Somme directe d'un nombre fini de sous-espaces. Caractérisation par l'unicité de la décomposition du vecteur nul.	La somme $F_1+...+F_p$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F_1+...+F_p$ sous la forme $x_1+...+x_p$ avec $x_i \in F_i$ est unique.

2.1.2 Espaces de dimension finie (9 heures)

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Existence de bases	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\dots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\dots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorème de la base extraite : de toute famille génératrice on peut extraire une base. Théorème de la base incomplète : toute famille libre peut être complétée en une base.
Dimension d'un espace de dimension finie	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimensions de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
En dimension n, une famille de n vecteurs est une base si et seulement si elle est libre, si et seulement si elle est génératrice.	
Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n)$.
Sous-espaces et dimension	
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.	Sous-espaces de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire.	Dimension commune des supplémentaires.
Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe d'un nombre fini de sous-espaces.	
Dimension d'une somme de deux sous-espaces ; formule de Grassmann. Caractérisation des couples de sous-espaces supplémentaires.	
Si $F_1,\dots,F_p$ sont des sous-espaces de dimension finie, alors: $\dim\sum_{i=1}^{p}F_i\leqslant\sum_{i=1}^{p}\dim F_i$, avec égalité si et seulement si la somme est directe.	

2.1.3 Applications linéaires (12 heures)

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Généralités	
Application linéaire. Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition, réciproque. Isomorphismes. Image et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire. Image d'une application linéaire. Noyau d'une application linéaire. Caractérisation de l'injectivité. Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(x_i), i \in I)$. Image d'une base par un isomorphisme. Application linéaire de rang fini, rang. Invariance par composition par un isomorphisme.	 L'ensemble $\mathscr{L}(E,F)$ est un espace vectoriel. Bilinéarité de la composition. Notation $\operatorname{rg}(u)$.
Endomorphismes	
Identité, homothéties. Anneau $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$. Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation des endomorphismes vérifiant $p^2 = p$ et $s^2 = \mathrm{Id}$. Automorphismes. Groupe linéaire.	Notations Id_E, Id . Non commutativité si $\dim E \geqslant 2$. Notation vu pour la composée $v \circ u$. Notation $\mathrm{GL}(E)$.
Détermination d'une application linéaire	
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F , alors il existe une et une seule application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que pour tout $i \in I$: $u(e_i) = f_i$. Classification, à isomorphisme près, des espaces de dimension finie par leur dimension. Une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. Un endomorphisme d'un espace de dimension finie est inversible à gauche si et seulement s'il est inversible à droite. Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie. Si $E_1,\dots,E_p$ sont des sous-espaces de E tels que $E = \bigoplus_{i=1}^{p} E_i$ et si $u_i \in \mathscr{L}(E_i,F)$ pour tout i , alors il existe une et une seule application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $u_{\|E_i} = u_i$ pour tout i .	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Théorème du rang	
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E , alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$. Théorème du rang : $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg}(u)$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Formes linéaires et hyperplans	
Forme linéaire. Hyperplan.	Formes coordonnées relativement à une base. Un hyperplan est le noyau d'une forme linéaire non nulle. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E, alors pour toute droite D non contenue dans H : $E = H \oplus D$. Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.	En dimension n, les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.
Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.	
Si E est un espace de dimension finie n, l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n-m$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n-m$ est l'intersection de m hyperplans.	Droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. L'étude de la dualité est hors programme.

2.1.4 Sous-espaces affines d'un espace vectoriel (3 heures)

Le but de cette partie est double :

- montrer comment l'algèbre linéaire permet d'étendre les notions de géométrie affine étudiées au lycée et d'utiliser l'intuition géométrique dans un cadre élargi.
- modéliser un problème affine par une équation $u(x) = a$ où u est une application linéaire, et unifier plusieurs situations de ce type déjà rencontrées.

Cette partie du cours doit être illustrée par de nombreuses figures.

Contenus	Capacités & commentaires
Présentation informelle de la structure affine d'un espace vectoriel : points et vecteurs. Translation.	L'écriture $B = A + \overrightarrow{u}$ est équivalente à la relation $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.
Sous-espace affine d'un espace vectoriel, direction. Hyperplan affine. Intersection de sous-espaces affines.	Sous-espaces affines de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, l'ensemble des solutions de l'équation $u(x) = a$ d'inconnue x est soit l'ensemble vide, soit un sous-espace affine dirigé par $\operatorname{Ker} u$.	Retour sur les systèmes linéaires, les équations différentielles linéaires d'ordres 1 et 2 et la recherche de polynômes interpolateurs. La notion d'application affine est hors programme.
Repère affine, coordonnées.	

2.2 Matrices

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

- présenter les liens entre applications linéaires et matrices, de manière à exploiter les changements de registres (géométrique, numérique, formel) ;
- étudier l'effet d'un changement de bases sur la représentation matricielle d'une application linéaire et la relation d'équivalence qui s'en déduit sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$;
- introduire brièvement la relation de similitude sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$;
- étudier les opérations élémentaires et les systèmes linéaires.

2.2.1 Opérations sur les matrices (4 heures)

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Espaces de matrices	
Espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$.	
Base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.	Dimension de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Produit matriciel	
Bilinéarité, associativité.	
Produit d'une matrice de la base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice de la base canonique de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	
Anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro et de matrices nilpotentes.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures).	
Transposition	
Transposée d'une matrice.	Notations ${}^tA$, A^T.
Opérations sur les transposées: combinaison linéaire, produit, inverse.	

2.2.2 Matrices et applications linéaires (4 heures)

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Matrice d'une application linéaire dans des bases	
Matrice d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases.	Notation $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)$. Isomorphisme $u \mapsto \mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u)$.
Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Cas particulier des endomorphismes.
Application linéaire canoniquement associée à une matrice	
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau. Une matrice carrée est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul.
Condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire. L'inverse d'une matrice triangulaire est une matrice triangulaire.	
Blocs	
Matrice par blocs. Théorème du produit par blocs.	Faire le lien avec les sous-espaces stables. La démonstration n'est pas exigible.

2.2.3 Changements de bases, équivalence et similitude (6 heures)

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Changements de bases	
Matrice de passage d'une base à une autre.	La matrice de passage $\mathscr{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ de $\mathscr{B}$ à $\mathscr{B}'$ est la matrice de la famille $\mathscr{B}'$ dans la base $\mathscr{B}$. Inversibilité et inverse de $\mathscr{P}_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$.
Effet d'un changement de base sur les coordonnées d'un vecteur, sur la matrice d'une application linéaire.	
Matrices équivalentes et rang	
Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est de rang r, il existe une base $\mathscr{B}$ de E et une base $\mathscr{B}'$ de F telles que : $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B},\mathscr{B}'}(u) = J_r$.	La matrice J_r a tous ses coefficients nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, égaux à 1.
Matrices équivalentes.	Interprétation géométrique.
Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r.	Classification des matrices équivalentes par le rang.
Invariance du rang par transposition.	
Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.	
Matrices semblables et trace	
Matrices semblables.	Interprétation géométrique.
Trace d'une matrice carrée.	Notations $\mathrm{tr}(A)$.
Linéarité de la trace, relation $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$, invariance par similitude.	
Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation $\mathrm{tr}(uv) = \mathrm{tr}(vu)$.	Notations $\mathrm{tr}(u)$. Trace d'un projecteur.

2.2.4 Opérations élémentaires et systèmes linéaires (6 heures)

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Opérations élémentaires	
Interprétation en termes de produit matriciel.	Les opérations élémentaires sont décrites dans le paragraphe « Systèmes linéaires » du chapitre « Calculs algébriques».
Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.	Application au calcul du rang et à l'inversion de matrices.
Systèmes linéaires	
Écriture matricielle d'un système linéaire.	Interprétation géométrique : intersection d'hyperplans affines.
Système homogène associé. Rang, dimension de l'espace des solutions. Compatibilité d'un système linéaire. Structure affine de l'espace des solutions. Le système carré $Ax = b$ d'inconnue x possède une et une seule solution si et seulement si A est inversible. Système de Cramer. Algorithme du pivot de Gauss.	

2.3 Groupe symétrique et déterminants

2.3.1 Groupe symétrique (2 heures)

Le groupe symétrique est introduit exclusivement en vue de l'étude des déterminants.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Généralités	
Groupe des permutations de l'ensemble $\{1,...,n\}$. Cycle, transposition. Décomposition d'une permutation en produit de cycles à supports disjoints : existence et unicité.	Notation S_n . Notation $(a_1\ a_2\ ...\ a_p)$. La démonstration n'est pas exigible, mais les étudiants doivent savoir décomposer une permutation. Commutativité de la décomposition.
Signature d'une permutation	
Tout élément de S_n est un produit de transpositions. Signature : il existe une et une seule application ε de S_n dans $\{-1,1\}$ telle que $\varepsilon(\tau) = -1$ pour toute transposition τ et $\varepsilon(\sigma\sigma') = \varepsilon(\sigma)\varepsilon(\sigma')$ pour toutes permutations σ et σ' .	La démonstration n'est pas exigible.

2.3.2 Déterminants (8 heures)

Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

- introduire la notion de déterminant d'une famille de vecteurs, en motivant sa construction par la géométrie ;
- établir les principales propriétés des déterminants des matrices carrées et des endomorphismes ;
- indiquer quelques méthodes simples de calcul de déterminants.

Dans tout ce chapitre, E désigne un espace vectoriel de dimension finie $n \geqslant 1$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Formes n-linéaires alternées	
Forme n-linéaire alternée. Antisymétrie, effet d'une permutation.	La définition est motivée par les notions intuitives d'aire et de volume algébriques, en s'appuyant sur des figures. Si f est une forme n-linéaire alternée et si $(x_1, \dots, x_n)$ est une famille liée, alors $f(x_1, \dots, x_n) = 0$.
Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base	
Si $\mathscr{B}$ est une base, il existe une et une seule forme n-linéaire alternée f pour laquelle $f(\mathscr{B}) = 1$. Toute forme n-linéaire alternée est un multiple de $\det_{\mathscr{B}}$. Expression du déterminant dans une base en fonction des coordonnées. Comparaison, si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ sont deux bases, de $\det_{\mathscr{B}}$ et $\det_{\mathscr{B}'}$. La famille $(x_1, \dots, x_n)$ est une base si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(x_1, \dots, x_n) \neq 0$. Orientation d'un espace vectoriel réel de dimension finie.	Notation $\det_{\mathscr{B}}$. La démonstration de l'existence n'est pas exigible. Dans $\mathbb{R}^2$ (resp. $\mathbb{R}^3$), interprétation du déterminant dans la base canonique comme aire orientée (resp. volume orienté) d'un parallélogramme (resp. parallélépipède).
Déterminant d'un endomorphisme	
Déterminant d'un endomorphisme. Déterminant d'une composée.	 Caractérisation des automorphismes.
Déterminant d'une matrice carrée	
Déterminant d'une matrice carrée. Déterminant d'un produit. Déterminant d'une transposée.	 Relation $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$. Caractérisation des matrices inversibles.
Calcul des déterminants	
Effet des opérations élémentaires. Cofacteur. Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Déterminant d'une matrice triangulaire par blocs, d'une matrice triangulaire. Déterminant de Vandermonde.	
Comatrice	
Comatrice. Relation $A\,{}^t\mathrm{Com}(A) = {}^t\mathrm{Com}(A)\,A = \det(A)\,I_n$.	Notation $\mathrm{Com}(A)$. Expression de l'inverse d'une matrice inversible.

2.4 Espaces préhilbertiens réels (10 heures)

La notion de produit scalaire a été étudiée d'un point de vue élémentaire dans l'enseignement secondaire. Les objectifs de ce chapitre sont les suivants :

- généraliser cette notion et exploiter, principalement à travers l'étude des projections orthogonales, l'intuition acquise dans des situations géométriques en dimension 2 ou 3 pour traiter des problèmes posés dans un contexte plus abstrait ;
- approfondir l'étude de la géométrie euclidienne du plan, notamment à travers l'étude des isométries vectorielles.

Le cours doit être illustré par de nombreuses figures. Dans toute la suite, E est un espace vectoriel réel.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Produit scalaire	
Produit scalaire. Espace préhilbertien, espace euclidien. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, produit scalaire $(f\|g)=\int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.	Notations $\langle x,y\rangle$, $(x\|y)$, $x.y$.
Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire, distance. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Formule de polarisation : $2\langle x,y\rangle=\\|x+y\\|^2-\\|x\\|^2-\\|y\\|^2$.	Exemples : sommes finies, intégrales.
Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.	Notation $X^{\perp}$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.
Famille orthogonale, orthonormale (ou orthonormée). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt.	
Bases orthonormales	
Existence de bases orthonormales dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormale incomplète. Coordonnées dans une base orthonormale, expressions du produit scalaire et de la norme.	
Produit mixte dans un espace euclidien orienté.	Notation $[x_1,\dots,x_n]$. Interprétation géométrique en termes de volume orienté, effet d'une application linéaire.
Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.	En dimension finie, dimension de l'orthogonal.
Projection orthogonale. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.	
Distance d'un vecteur à un sous-espace. Le projeté orthogonal de x sur V est l'unique élément de V qui minimise la distance de x à V .	Notation $d(x,V)$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Hyperplans affines d'un espace euclidien	
Vecteur normal à un hyperplan affine d'un espace euclidien. Si l'espace est orienté, orientation d'un hyperplan par un vecteur normal.	Lignes de niveau de $M \mapsto \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}$.
Équations d'un hyperplan affine dans un repère orthonormal.	Cas particuliers de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Distance à un hyperplan affine défini par un point A et un vecteur normal unitaire $\overrightarrow{n}$: $\left\|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}\right\|$.	Cas particuliers de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Isométrie vectorielle (ou automorphisme orthogonal) : définition par la linéarité et la conservation des normes, caractérisation par la conservation du produit scalaire, caractérisation par l'image d'une base orthonormale.	
Symétrie orthogonale, réflexion.	
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$.
Matrices orthogonales	
Matrice orthogonale : définition ${}^tAA = I_n$, caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \mathrm{O}(n)$.
Groupe orthogonal.	
Lien entre les notions de base orthonormale, isométrie et matrice orthogonale.	
Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie.	
Matrice orthogonale positive, négative ; isométrie positive, négative.	
Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}(E), \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SO}(n)$.
Isométries vectorielles en dimension 2	
Description des matrices orthogonales et orthogonales positives de taille 2.	Lien entre les éléments de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ et les nombres complexes de module 1.
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduira à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle,la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs.
Classification des isométries d'un plan euclidien orienté.	

3 ANALYSE 1

Le programme du premier semestre est conçu de façon à viser trois objectifs majeurs :

- assurer la progressivité du passage aux études supérieures, en tenant compte des programmes du lycée, dont il consolide et élargit les acquis ;
- consolider la formation des étudiants dans les domaines de la logique, du raisonnement et des techniques de calcul,qui sont des outils indispensables tant aux mathématiques qu'aux autres disciplines scientfiques ;
- présenter des notions nouvelles riches, de manière à susciter l'intérêt des étudiants.

  Il est à noter que les différents points de vocabulaire, notations et raisonnement nécessaires aux étudiants pour la conception et la rédaction efficace d'une démonstration mathématique doivent être introduites **de manière progressive** en vue d'être acquises et maîtrisées en fin de premier semestre, et cela dans les deux disciplines : analyse et algèbre. Ces points sont les suivants :

- L'emploi des quantificateurs (sans que cela soit en guise d'abréviations) , implication, contraposition, équivalence, négation d'une proposition.
- Modes de raisonnement : par récurrence (faible et forte), par contraposition, par l'absurde, par analyse-synthèse.

Toute étude systématique de la logique ou de la théorie des ensembles est hors programme.
Le volume horaire proposé pour chaque chapitre est approximatif et concerne le temps alloué au cours intégré (cours, applications et exercices corrigés (T.D)).

3.1 Techniques fondamentales de calcul en analyse (15H)

Le point de vue adopté dans ce chapitre est principalement pratique : il s'agit, en prenant appui sur les acquis du lycée, de mettre en œuvre des techniques de l'analyse, en particulier celles de majoration. Les définitions précises et les constructions rigoureuses des notions de calcul différentiel ou intégral utilisées sont différées à un chapitre ultérieur. Cette appropriation en deux temps est destinée à faciliter les apprentissages.
Les objectifs de formation sont les suivants :

- une bonne maîtrise des automatismes et du vocabulaire de base relatifs aux inégalités ;
- l'introduction de fonctions pour établir des inégalités ;
- la manipulation des fonctions classiques dont le corpus est étendu ;
- le calcul de dérivées et de primitives ;
- la mise en pratique, sur des exemples simples, de l'intégration par parties et du changement de variable ;
- l'application des deux points précédents aux équations différentielles.

Les étudiants doivent connaître les principales techniques de calcul et savoir les mettre en pratique sur des cas simples. Le cours sur les équations différentielles est illustré par des exemples issus des autres disciplines scientifiques.

3.1.1 Fonctions de la variable réelle à valeurs réelles ou complexes

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Inégalités dans $\mathbb{R}$	
Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$. Compatibilité avec les opérations.	Exemples de majoration et de minoration de sommes, de produits et de quotients.
Parties positive et négative d'un réel.	Notations x^+ et x^-.
Valeur absolue. Inégalité triangulaire.	$x^+ = \max(x,0)$ et $x^- = \max(-x,0)$. Expressions à l'aide de x et de $\|x\|$.
Intervalles de $\mathbb{R}$.	Interprétation sur la droite réelle d'inégalités du type $\|x-a\| \leqslant b$.
Parties majorées, minorées, bornées. Majorant, minorant , maximum, minimum.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Généralités sur les fonctions	
Ensemble de définition.	
Représentation graphique d'une fonction f à valeurs réelles.	Graphes des fonctions $x \mapsto f(x)+a$, $x \mapsto f(x+a)$, $x \mapsto f(a-x)$, $x \mapsto f(ax)$, $x \mapsto af(x)$. Résolution graphique d'équations et d'inéquations du type $f(x)=\lambda$ et $f(x) \geqslant \lambda$.
Parité, imparité, périodicité.	Interprétation géométrique de ces propriétés.
Somme, produit, composée.	
Monotonie (large et stricte).	
Fonctions majorées, minorées, bornées.	Traduction géométrique de ces propriétés. Une fonction f est bornée si et seulement si $\lvert f\rvert$ est majorée.
Dérivation	
Équation de la tangente en un point.	
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient, d'une composée.	Ces résultats sont admis à ce stade. Exemples de calculs de dérivées partielles. À ce stade, toute théorie sur les fonctions de plusieurs variables est hors programme.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle.	Résultats admis à ce stade. Les étudiants doivent savoir introduire des fonctions pour établir des inégalités.
Tableau de variation. Graphe d'une réciproque. Dérivée d'une réciproque.	Interprétation géométrique de la dérivabilité et du calcul de la dérivée d'une bijection réciproque.
Dérivées d'ordre supérieur.	
Etude d'une fonction	
Détermination des symétries et des périodicités afin de réduire le domaine d'étude, tableau de variations, asymptotes verticales et horizontales, tracé du graphe.	Application à la recherche d'extremums et à l'obtention d'inégalités.
Fonctions usuelles	
Fonctions exponentielle, logarithme népérien, fonctions puissances.	Dérivée, variation et graphe. Notation ln. Les fonctions puissances sont définies sur $\mathbb{R}_+^*$ et prolongées en 0 le cas échéant. Seules les fonctions puissances entières sont en outre définies sur $\mathbb{R}_-^*$.
Relations $(xy)^\alpha = x^\alpha y^\alpha, x^{\alpha+\beta} = x^\alpha x^\beta, (x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.	
Croissances comparées des fonctions logarithme, puissances et exponentielle.	
Fonctions sinus, cosinus, tangente.	
Fonctions circulaires réciproques.	Notations $\operatorname{Arcsin}, \operatorname{Arccos}, \operatorname{Arctan}$.
Fonctions hyperboliques.	Notations $\operatorname{sh}, \operatorname{ch}, \operatorname{th}$. Seule relation de trigonométrie hyperbolique exigible : $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.
Dérivation d'une fonction à valeurs complexes	
Dérivée d'une fonction à valeurs complexes.	La dérivée est définie par ses parties réelle et imaginaire.
Dérivée d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'un quotient.	Brève extension des résultats sur les fonctions à valeurs réelles.
Dérivée de $\exp(\phi)$ où ϕ est une fonction dérivable à valeurs complexes.	

3.1.2 Primitives et équations différentielles linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Calcul de primitives	
Primitives d'une fonction définie sur un intervalle à valeurs complexes.	Description de l'ensemble des primitives d'une fonction sur un intervalle connaissant l'une d'entre elles. Les étudiants doivent savoir utiliser les primitives de $x \mapsto e^{\lambda x}$ pour calculer celles de $x \mapsto e^{ax}\cos(bx)$ et $x \mapsto e^{ax}\sin(bx)$.
Primitives des fonctions puissances, trigonométriques et hyperboliques, exponentielle, logarithme, $$x \mapsto \frac{1}{1+x^2}, x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$	Les étudiants doivent savoir calculer les primitives de fonctions du type $x \mapsto \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$, et reconnaître les dérivées de fonctions composées.
Dérivée de $x \mapsto \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt$, où f est continue.	Résultat admis à ce stade.
Toute fonction continue sur un intervalle admet des primitives . Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive.	
Intégration par parties pour des fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Changement de variable : si φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et si f est continue sur $\varphi(I)$, alors pour tous a et b dans I $$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)\,dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$$	On définit à cette occasion la classe $\mathscr{C}^1$. Application au calcul de primitives.
Équations différentielles linéaires du premier ordre	
Notion d'équation différentielle linéaire du premier ordre: $y' + a(x)y = b(x)$, où a et b sont des fonctions continues définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs réelles ou complexes.	Équation homogène associée. Cas particulier où la fonction a est constante.
Résolution d'une équation homogène.	
Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	
Principe de superposition.	
Méthode de la variation de la constante.	
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	
Équations différentielles linéaires du second ordre à coefficients constants	
Notion d'équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants : $$y'' + ay' + by = f(x)$$ où a et b sont des scalaires et f est une application continue à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.	Équation homogène associée.
Résolution de l'équation homogène.	Si a et b sont réels, description des solutions réelles.
Forme des solutions : somme d'une solution particulière et de la solution générale de l'équation homogène.	Les étudiants doivent savoir déterminer une solution particulière dans le cas d'un second membre de la forme $x \mapsto Ae^{\lambda x}$, avec $(A,\lambda) \in \mathbb{C}^2$, $x \mapsto B\cos(\omega x)$, $x \mapsto B\sin(\omega x)$ avec $(B,\omega) \in \mathbb{R}^2$.
Principe de superposition.	
Existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.	La démonstration de ce résultat est hors programme.

3.2 Nombres réels et suites numériques (18H)

L'objectif de ce chapitre est de fonder rigoureusement le cours d'analyse relatif aux propriétés des nombres réels. Il convient d'insister sur l'aspect fondateur de la propriété de la borne supérieure.
Dans l'étude des suites, on distingue les aspects qualitatifs (monotonie, convergence, divergence) des aspects quantitatifs (majoration, encadrement, vitesse de convergence ou de divergence).
Il convient de souligner l'intérêt des suites, tant du point de vue pratique (modélisation de phénomènes discrets) que théorique (approximation de nombres réels).

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Ensembles de nombres usuels	
Entiers naturels, relatifs, nombres décimaux, rationnels, réels, irrationnels.	La construction de $\mathbb{R}$ est hors programme.
Partie entière.	Notations $[x]$, $\mathrm{E}(x)$
Approximations décimales d'un réel.	Valeurs décimales approchées à la précision 10^{-n} par défaut et par excès.
Tout intervalle ouvert non vide rencontre $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.	
Droite achevée $\overline{\mathbb{R}}$.	
Propriété de la borne supérieure	
Borne supérieure (resp. inférieure) d'une partie non vide majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$.	
Une partie X de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si pour tous $a, b \in X$ tels que $a \leqslant b$, $[a, b] \subset X$.	
Généralités sur les suites réelles	
Suite majorée, minorée, bornée. Suite stationnaire, monotone, strictement monotone.	Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si et seulement si $(\lvert u_n\rvert)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
Limite d'une suite réelle	
Limite finie ou infinie d'une suite.	Pour $l \in \overline{\mathbb{R}}$, notation $u_n \to l$. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notation $\lim\limits_{+\infty} u_n$.
Suite convergente, divergente.	
Toute suite convergente est bornée.	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient.	Produit d'une suite bornée et d'une suite de limite nulle.
Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.	
Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $l > 0$, alors $u_n > 0$ à partir d'un certain rang.	
Théorème de convergence par encadrement. Théorèmes de divergence par minoration ou majoration.	
Suites monotones	
Théorème de la limite monotone : toute suite monotone possède une limite.	Toute suite croissante majorée converge, toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
Théorème des suites adjacentes.	

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Suites extraites	
Suite extraite.	
Si une suite possède une limite, toutes ses suites extraites possèdent la même limite.	Utilisation pour montrer la divergence d'une suite. Si (u_{2n}) et (u_{2n+1}) tendent vers l, alors (u_n) tend vers l.
Théorème de Bolzano-Weierstrass.	Les étudiants doivent connaître le principe de la démonstration par dichotomie, mais la formalisation précise n'est pas exigible.
Traduction séquentielle de certaines propriétés	
Partie dense de $\mathbb{R}$.	Une partie de $\mathbb{R}$ est dense dans $\mathbb{R}$ si elle rencontre tout intervalle ouvert non vide. Densité de l'ensemble des décimaux, des rationnels, des irrationnels.
Caractérisation séquentielle de la densité. Si X est une partie non vide majorée (resp. non majorée) de $\mathbb{R}$, il existe une suite d'éléments de X de limite $\sup(X)$(resp.$+\infty$).	
Suites complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite en termes de parties réelle et imaginaire.
Théorème de Bolzano-Weierstrass.	La démonstration n'est pas exigible.
Suites particulières	
Suite arithmétique, géométrique. Suite arithmético-géométrique. Suite récurrente linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.	Les étudiants doivent savoir déterminer une expression du terme général de ces suites.
Exemples de suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.	Seul résultat exigible : si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$converge vers l et si f est continue en l, alors $f(l) = l$.

3.3 Limites, continuité,dérivabilité

Cette partie est divisée en deux chapitres, consacrés aux limites et à la continuité pour le premier, au calcul différentiel pour le second.
Dans de nombreuses questions de nature qualitative, on visualise une fonction par son graphe. Il convient de souligner cet aspect géométrique en ayant recours à de nombreuses figures.
Les fonctions sont définies sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ non vide et non réduit à un point et sont à valeurs réelles ou complexes.
Dans un souci d'unification, on dit qu'une propriété portant sur une fonction f définie sur I est vraie au voisinage de a si elle est vraie sur l'intersection de I avec un intervalle ouvert centré sur a si a est réel, avec un intervalle $[A,+\infty[$ si $a = +\infty$, avec un intervalle $]-\infty, A]$ si $a = -\infty$.

3.3.1 Limites, continuité (12H)

Le premier paragraphe consiste largement en des adaptations au cas continu de notions déjà abordées pour les suites. Afin d'éviter des répétitions, le professeur a la liberté d'admettre certains résultats.
Pour la pratique du calcul de limites, on se borne à ce stade à des calculs très simples, en attendant de pouvoir disposer d'outils efficaces (développements limités).

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Limite d'une fonction en un point	
Étant donné un point a de $\overline{\mathbb{R}}$ appartenant à I ou extrémité de I, limite finie ou infinie d'une fonction en a.	Notations $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$. Les définitions sont énoncées avec des inégalités larges.
Unicité de la limite.	Notations $\lim\limits_{x\to a} f(x)$.
Si f est définie en a et possède une limite en a, alors $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.	
Si f possède une limite finie en a, f est bornée au voisinage de a.	
Limite à droite, limite à gauche.	Notations $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$.
Extension de la notion de limite en a lorsque f est définie sur $I\setminus\{a\}$.	
Caractérisation séquentielle de la limite (finie ou infinie).	
Opérations sur les limites : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	
Stabilité des inégalités larges par passage à la limite.	
Théorèmes d'encadrement (limite finie), de minoration (limite $+\infty$), de majoration (limite $-\infty$).	
Théorème de la limite monotone.	
Continuité	
Continuité, prolongement par continuité en un point.	
Continuité à gauche, à droite.	
Caractérisation séquentielle de la continuité en un point.	
Opérations sur les fonctions continues en un point : combinaison linéaire, produit, quotient, composition.	
Continuité sur un intervalle.	
Image d'un intervalle par une fonction continue	
Théorème des valeurs intermédiaires.	Cas d'une fonction strictement monotone.
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.	
Image d'un segment par une fonction continue	
Toute fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration n'est pas exigible.
L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.	
Continuité et injectivité	
Toute fonction continue injective sur un intervalle est strictement monotone.	La démonstration n'est pas exigible.
La réciproque d'une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle est continue.	
Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la limite et de la continuité à l'aide de parties réelle et imaginaire.

3.3.2 Dérivation(12H)

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Nombre dérivé, fonction dérivée	
Dérivabilité en un point, nombre dérivé.	Développement limité à l'ordre 1. Interprétation géométrique.
La dérivabilité entraîne la continuité. Dérivabilité à gauche, à droite. Dérivabilité et dérivée sur un intervalle. Opérations sur les fonctions dérivables et les dérivées : combinaison linéaire, produit, quotient, composition, réciproque.	Tangente au graphe d'une réciproque.
Extremum local et point critique	
Extremum local. Condition nécessaire en un point intérieur.	Un point critique est un zéro de la dérivée.
Théorèmes de Rolle et des accroissements finis	
Théorème de Rolle.	Utilisation pour établir l'existence de zéros d'une fonction.
Égalité des accroissements finis. Inégalité des accroissements finis : si f est dérivable et si $\|f'\|$ est majorée par K, alors f est K-lipschitzienne.	Interprétations géométrique. La notion de fonction lipschitzienne est introduite à cette occasion. Application à l'étude des suites définies par une relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.
Caractérisation des fonctions dérivables constantes, monotones, strictement monotones sur un intervalle. Théorème de la limite de la dérivée : si f est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ et si $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \neq a}} f'(x) = l \in \overline{\mathbb{R}}$, alors $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$.	Interprétation géométrique. Si $l \in \mathbb{R}$, alors f est dérivable en a et f' est continue en a.
Fonctions de classe $\mathscr{C}^k$	
Pour $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, fonction de classe $\mathscr{C}^k$. Opérations sur les fonctions de classe $\mathscr{C}^k$: combinaison linéaire, produit (formule de Leibniz), quotient, composition, réciproque. Théorème de classe $\mathscr{C}^k$ par prolongement : si f est de classe $\mathscr{C}^k$ sur $I \setminus \{a\}$ et si $f^{(i)}(x)$ possède une limite finie lorsque x tend vers a pour tout $i \in \{0, \ldots, k\}$, alors f admet un prolongement de classe $\mathscr{C}^k$ sur I. Formule de Taylor-Lagrange à l'ordre n pour une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.	Les démonstrations relatives à la composition et à la réciproque ne sont pas exigibles.
Fonctions complexes	
Brève extension des définitions et résultats précédents.	Caractérisation de la dérivabilité en termes de parties réelle et imaginaire.
Inégalité des accroissements finis pour une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.	Le résultat, admis à ce stade, sera justifié dans le chapitre « Intégration ».

3.4 Fonctions convexes(6H)

L'objectif de ce chapitre est d'étudier les fonctions convexes d'une variable réelle.
Le cours gagne à être illustré par de nombreuses figures.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Fonctions convexes d'une variable réelle	
Une fonction f est convexe sur l'intervalle I de $\mathbb{R}$ si pour tout (x,y) de I^2 et tout λ de $[0,1]$: $$f\big((1-\lambda)x+\lambda y\big) \leqslant (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y).$$	Pour f convexe, les étudiants doivent connaître l'inégalité $$f\Big(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\Big) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\lambda_i f(x_i)$$ où $x_1,\dots,x_n$ sont des points de I et $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ des réels positifs de somme 1.
Inégalité des pentes. Fonction concave.	Position relative du graphe et de ses cordes.
Fonctions convexes dérivables, deux fois dérivables	
Caractérisation des fonctions convexes dérivables sur I, des fonctions convexes deux fois dérivables sur I. Position relative du graphe d'une fonction convexe dérivable et de ses tangentes.	Exemples d'inégalités de convexité.

3.5 Analyse asymptotique(12H)

L'objectif de ce chapitre est de familiariser les étudiants avec les techniques asymptotiques de base, dans les cadres discret et continu. Les suites et les fonctions y sont à valeurs réelles ou complexes, le cas réel jouant un rôle prépondérant.
On donne la priorité à la pratique d'exercices plutôt qu'à la vérification de propriétés élémentaires relatives aux relations de comparaison.
Les étudiants doivent connaître les développements limités usuels et savoir rapidement mener à bien des calculs asymptotiques simples.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Relations de comparaison : cas des suites	
Relations de domination, de négligeabilité, d'équivalence.	Notations $u_n = O(v_n)$, $u_n = o(v_n)$, $u_n \sim v_n$. Caractérisation de ces relations à partir du quotient $\dfrac{u_n}{v_n}$ lorsque la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne s'annule pas à partir d'un certain rang. Traduction à l'aide du symbole o des croissances comparées des suites de termes généraux $\ln^{\beta}(n), n^{\alpha}, e^{\gamma n}$.
Liens entre les relations de comparaison. Opérations sur les équivalents : produit, quotient, puissances. Propriétés conservées par équivalence : signe, limite.	Équivalence des relations $u_n \sim v_n$ et $u_n - v_n = o(v_n)$.
Relations de comparaison : cas des fonctions	
Adaptation aux fonctions des définitions et résultats précédents.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Développements limités	
Développement limité, unicité des coefficients, troncature. Forme normalisée d'un développement limité : $f(a+h) \underset{h\to 0}{=} h^p\left(a_0+a_1h+\ldots+a_nh^n+o(h^n)\right)$ avec $a_0 \neq 0$.	Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Équivalence $f(a+h) \underset{h\to 0}{\sim} a_0h^p$; signe de f au voisinage de a.
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.	Utilisation de la forme normalisée pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.
Primitivation d'un développement limité. Formule de Taylor-Young : développement limité à l'ordre n en un point d'une fonction de classe $\mathscr{C}^n$. Développement limité à tout ordre en 0 de exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan, et de tan à l'ordre 3.	
Utilisation des développements limités pour préciser l'allure d'une courbe au voisinage d'un point.	Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local.
Exemples de développements asymptotiques	
La notion de développement asymptotique est présentée sur des exemples simples.	La notion d'échelle de comparaison est hors programme.
Formule de Stirling.	La démonstration n'est pas exigible.

4 ANALYSE 2

Le programme du deuxième semestre en analyse est organisé autour de deux objectifs :

- prolonger les chapitres d'analyse du premier semestre par l'étude de l'intégration sur un segment et des séries numériques, et achever ainsi la justfication des résultats admis dans le chapitre « Techniques fondamentales de calcul en analyse » ;
- consolider les notions relatives aux probabilités sur un univers fini introduites au lycée et enrichir le corpus des connaissances sur les variables aléatoires définies sur un tel univers.

4.1 Intégration(24H)

L'objectif majeur de ce chapitre est de définir l'intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment à valeurs réelles ou complexes et d'en établir les propriétés élémentaires, notamment le lien entre intégration et primitivation. On achève ainsi la justification des propriétés présentées dans le chapitre « Techniques fondamentales de calcul en analyse ». Ce chapitre permet de consolider la pratique des techniques usuelles de calcul intégral. Il peut également offrir l'occasion de revenir sur l'étude des équations différentielles rencontrées au premier semestre.
La notion de continuité uniforme est introduite uniquement en vue de la construction de l'intégrale. L'étude systématique des fonctions uniformément continues est exclue.
Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Continuité uniforme	
Continuité uniforme.	
Théorème de Heine.	La démonstration n'est pas exigible.
Fonctions continues par morceaux	
Subdivision d'un segment, pas d'une subdivision. Fonction en escalier.	
Fonction continue par morceaux sur un segment, sur un intervalle.	Une fonction est continue par morceaux sur un intervalle I si sa restriction à tout segment inclus dans I est continue par morceaux.
Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment	
Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment.	Le programme n'impose pas de construction particulière. Interprétation géométrique. Aucune difficulté théorique relative à la notion d'aire ne doit être soulevée. Notations $\int_{[a,b]} f$, $\int_a^b f$, $\int_a^b f(t)\,dt$.
Linéarité, positivité et croissance de l'intégrale. Inégalité : $\left\| \int_{[a,b]} f \right\| \leqslant \int_{[a,b]} \|f\|$.	Les étudiants doivent savoir majorer et minorer des intégrales.
Relation de Chasles.	Extension de la notation $\int_a^b f(t)\,dt$ au cas où $b \leqslant a$. Propriétés correspondantes.
L'intégrale sur un segment d'une fonction continue de signe constant est nulle si et seulement si la fonction est nulle.	
Sommes de Riemann	
Si f est une fonction continue par morceaux sur le segment $[a,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors : $\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_a^b f(t)\,dt.$	Interprétation géométrique. Démonstration dans le cas où f est de classe $\mathscr{C}^1$.

Contenus	Capacités & Commentaires
Intégrale fonction de sa borne supérieure	
Dérivation de $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ pour f continue. Calcul d'une intégrale au moyen d'une primitive. Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives. Intégration par parties, changement de variable.	
Calcul de primitives	
Primitives usuelles.	Sont exigibles les seules primitives mentionnées dans le chapitre «Techniques fondamentales de calcul en analyse».
Calcul de primitives par intégration par parties, par changement de variable.	
Utilisation de la décomposition en éléments simples pour calculer les primitives d'une fraction rationnelle.	On évitera tout excès de technicité.
Formules de Taylor	
Pour une fonction f de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, formule de Taylor avec reste intégral au point a à l'ordre n.	
Inégalité de Taylor-Lagrange pour une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$.	On soulignera la différence de nature entre la formule de Taylor-Young (locale) et les formules de Taylor globales (reste intégral et Taylor-Lagrange).

4.2 Séries numériques(15H)

L'étude des séries prolonge celle des suites. Elle permet d'illustrer le chapitre « Analyse asymptotique » et, à travers la notion de développement décimal de mieux appréhender les nombres réels. L'objectif majeur est la maîtrise de la convergence absolue ; tout excès de technicité est exclu.

Contenus	Capacités & commentaires
Généralités	
Sommes partielles. Convergence, divergence. Somme et restes d'une série convergente.	La série est notée $\sum u_n$ ou $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$. En cas de convergence, sa somme est notée $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n$.
Linéarité de la somme.	
Le terme général d'une série convergente tend vers 0.	Divergence grossière.
Séries géométriques : condition nécessaire et suffisante de convergence, somme.	
Lien suite-série.	La suite (u_n) et la série $\sum(u_{n+1}-u_n)$ ont même nature.
Séries à termes positifs	
Une série à termes positifs converge si et seulement si la suite de ses sommes partielles est majorée. Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout n, la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont positives et si $u_n \sim v_n$, les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ont même nature.	

Contenus	Capacités & commentaires
Comparaison série-intégrale dans le cas monotone	
Si f est monotone, encadrement des sommes partielles de $\sum f(n)$ à l'aide de la méthode des rectangles. Séries de Riemann.	Application à l'étude de sommes partielles et de restes.
Séries absolument convergentes	
Convergence absolue. La convergence absolue implique la convergence. Si (u_n) est une suite complexe, si (v_n) est une suite d'éléments de $\mathbb{R}_+$, si $u_n = O(v_n)$ et si $\sum v_n$ converge,alors $\sum u_n$ est absolument convergente donc convergente.	
Représentation décimale des réels	
Existence et unicité du développement décimal propre d'un réel.	La démonstration n'est pas exigible.

4.3 Dénombrement(10H)

Ce chapitre est introduit essentiellement en vue de son utilisation en probabilités ; rattaché aux mathématiques discrètes, le dénombrement interagit également avec l'algèbre et l'informatique. Il permet de modéliser certaines situations combinatoires et offre un nouveau cadre à la représentation de certaines égalités.
Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- parmi les propriétés du premier paragraphe , les plus intuitives sont admises sans démonstration ;
- l'utilisation systématique de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.

Contenus	Capacités & commentaires
Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $\|A\|$, $\mathrm{Card}(A)$.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective. Cardinal d'un produit fini d'ensembles finis. Cardinal de la réunion de deux ensembles finis. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	
Listes et combinaisons	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n. Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

4.4 Probabilités(26H)

Ce chapitre a pour objectif de consolider les connaissances relatives aux probabilités sur un univers fini et aux variables aléatoires définies sur un tel univers présentées dans les classes antérieures. Il s'appuie sur le chapitre consacré au dénombrement.
Ce chapitre a vocation à interagir avec l'ensemble du programme. Il se prête également à des activités de modélisation de situations issues de la vie courante ou d'autres disciplines.

4.4.1 Probabilités sur un univers fini

Les définitions sont motivées par la notion d'expérience aléatoire. La modélisation de situations aléatoires simples fait partie des capacités attendues des étudiants.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Expérience aléatoire et univers	
L'ensemble des issues (ou résultats possibles ou réalisations) d'une expérience aléatoire est appelé univers. Événement, événement élémentaire (singleton), événement contraire, événement «A et B», événement «A ou B», événement impossible, événements incompatibles, système complet d'événements.	On se limite au cas où cet univers est fini.
Espaces probabilisés finis	
Une probabilité sur un univers fini Ω est une application P de $\mathscr{P}(\Omega)$ dans $[0,1]$ telle que $P(\Omega)=1$ et, pour toutes parties disjointes A et B , $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$. Détermination d'une probabilité par les images des singletons. Probabilité uniforme. Propriétés des probabilités :probabilité de la réunion de deux événements, probabilité de l'événement contraire, croissance.	Un espace probabilisé fini est un couple (Ω,P) où Ω est un univers fini et P une probabilité sur Ω.
Probabilités conditionnelles	
Si $P(B)>0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par : $$P(A\backslash B)=P_B(A)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}.$$	On justifiera cette définition par une approche heuristique fréquentiste. L'application P_B est une probabilité.
Formule des probabilités composées. Formule des probabilités totales. Formules de Bayes : 1. si A et B sont deux événements tels que $P(A)>0$ et $P(B)>0$, alors : $$P(A\backslash B)=\frac{P(B\backslash A)P(A)}{P(B)}$$ 2. si $(A_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ est un système complet d'événements de probabilités non nulles et si B est un événement de probabilité non nulle, alors : $$P(A_j\backslash B)=\frac{P(B\backslash A_j)P(A_j)}{\sum\limits_{i=1}^{n}P(B\backslash A_i)P(A_i)}$$	On donnera plusieurs applications issues de la vie courante.

Contenus	Capacités & Commentaires
Événements indépendants	
Couple d'événements indépendants.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A \backslash B) = P(A)$.
Famille finie d'événements mutuellement indépendants.	L'indépendance deux à deux des événements $A_1, \ldots, A_n$ n'implique pas l'indépendance mutuelle si $n \geqslant 3$.

4.4.2 Variables aléatoires sur un espace probabilisé fini

L'utilisation de variables aléatoires pour modéliser des situations aléatoires simples fait partie des capacités attendues des étudiants.

Contenus	Capacités & commentaires
Variables aléatoires	
Une variable aléatoire est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E. Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, la variable aléatoire est dite réelle. Loi P_X de la variable aléatoire X.	Si X est une variable aléatoire et si A est une partie de E, notation $X \in A$ ou $(X \in A)$ pour l'événement $X^{-1}(A)$. Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$, $P(X \leqslant x)$. L'application P_X est définie par la donnée des $P(X = x)$ pour x dans $X(\Omega)$.
Image d'une variable aléatoire par une fonction, loi associée.	
Lois usuelles	
	La reconnaissance de situations modélisées par les lois classiques de ce paragraphe est une capacité attendue des étudiants.
Loi uniforme.	
Loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.	Notation $\mathscr{B}(p)$. Interprétation : succès d'une expérience. Lien entre variable aléatoire de Bernoulli et indicatrice d'un événement.
Loi binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.	Notation $\mathscr{B}(n, p)$. Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes, ou tirages avec remise dans un modèle d'urnes.
Couples de variables aléatoires	
Couple de variables aléatoires.	
Loi conjointe, lois marginales d'un couple de variables aléatoires.	La loi conjointe de X et Y est la loi de (X, Y), les lois marginales de (X, Y) sont les lois de X et de Y. Les lois marginales ne déterminent pas la loi conjointe.
Loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.	
Variables aléatoires indépendantes	
Couple de variables aléatoires indépendantes. Si X et Y sont indépendantes : $$P\big((X, Y) \in A \times B\big) = P(X \in A)P(X \in B).$$	
Variables aléatoires mutuellement indépendantes.	Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes.

Contenus	Capacités & Commentaires
Si $X_1,\dots,X_n$ sont des variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors quel que soit $(A_1,\dots,A_n)\in\prod_{i=1}^{n}\mathscr{P}(X_i(\Omega))$, les événements $(X_i\in A_i)$ sont mutuellement indépendants. Si $X_1,\dots,X_n$ sont mutuellement indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$, alors $X_1+\dots+X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$. Si X et Y sont indépendantes, les variables aléatoires $f(X)$ et $g(Y)$ le sont aussi.	
Espérance	
Espérance d'une variable aléatoire réelle.	Interprétation en terme de moyenne pondérée. Une variable aléatoire centrée est une variable aléatoire d'espérance nulle.
Relation : $\mathrm{E}(X)=\sum_{\omega\in\Omega}P\big(\{\omega\}\big)X(\omega)$. Propriétés de l'espérance : linéarité, positivité, croissance. Espérance d'une variable aléatoire constante, de Bernoulli, binomiale. Formule de transfert : Si X est une variable aléatoire définie sur Ω à valeurs dans E et f une fonction définie sur $X(\Omega)$ à valeurs dans $\mathbb{R}$, alors	
$\mathrm{E}\big(f(X)\big)=\sum_{x\in X(\Omega)}P(X=x)f(x)$.	L'espérance de $f(X)$ est déterminée par la loi de X.
Inégalité de Markov.	
Si X et Y sont indépendantes : $\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$.	La réciproque est fausse en général.
Variance, écart type et covariance	
Moments.	Le moment d'ordre k de X est $\mathrm{E}(X^k)$.
Variance, écart type.	La variance et l'écart type sont des indicateurs de dispersion. Une variable aléatoire réduite est une variable aléatoire de variance 1.
Relation $\mathrm{V}(X)=\mathrm{E}(X^2)-\mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX+b)=a^2\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X)>0$, la variable aléatoire $\dfrac{X-\mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable aléatoire de Bernoulli, d'une variable aléatoire binomiale. Inégalité de Bienaymé-Tchebychev. Covariance de deux variables aléatoires. Relation $\mathrm{Cov}(X,Y)=\mathrm{E}(XY)-\mathrm{E}(X)\mathrm{E}(Y)$. Cas de variables indépendantes.	
Variance d'une somme, cas de variables deux à deux indépendantes.	Application à la variance d'une variable aléatoire binomiale.

5 Physique 1: Mécanique

Objectifs:

- acquérir les concepts fondamentaux: de la mécanique du point à la dynamique spatiale des systèmes. Introduction à la dynamique des solides.
- Initier les étudiants aux différentes étapes d'un raisonnement en physique. Formulation d'un problème, établissement d'un modèle, sa formalisation mathématique, interprétation physique des solutions, validation du modèle.
- familiariser les étudiants aux outils mathématiques utilisés.

5.1 Introduction: Systèmes des coordonnées, calcul vectoriel

5.2 Cinématique du point. Changement de référentiel.

5.3 Dynamique dans des référentiels galiléen et non galiléen.

5.4 Travail. Energie

5.5 Moment cinétique

5.6 Interaction de deux points matériels.

5.7 Mouvement à force centrale. Loi de Kepler

5.8 Introduction à la dynamique des solides.

6 Informatique 1: Algorithmique et programmation en langage C

6.1 Objectifs: Savoirs-faire et compétences.

Ce cours présente les concepts de base de la programmation et de l'algorithmique avec des applications en langage C présentée en parallèle. Chaque notion présentées algorithmiquement est décrite et utilisée en langage C

6.2 Programme

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Introduction	
Architecture simplifiée d'un ordinateur,composantes principales, principe de la programmation impérative, étapes de réalisation d'un logiciel, définitions (algorithmes, programmes, compilation...)	
Eléments de base	
Type de base, constantes,variables, expressions, affectation. Entrées sorties standard, composition séquentielle, structure de contrôle, structures conditionnelles, structures itératives.	
Implantation en mode impératif d'un algorithme issu d'une décomposition fonctionnelle du problème	
Définition et appel de fonction, passage de paraamètre par valeurs et par adresse, récursivité (mécanisme de pile d'exécution.)	
Notion de tableau	
Tableaux à une dimension ou vecteurs, tableaux à deux dimensions ou matrices (l'accent sera mis sur des exemples de calcul polynômial et matriciel)	

6.3 Références bibliographiques

- CHATY G., VICARD J., Algorithmique, Nathan Université
- VEIGNEAU S., Approches impérative et fonctionnelle de l'algorithmique, Springer.
- FIEUX L., Le langage C, Campus Press.
- DELANNOY C., Programmer en langage C, Eyrolles.

L_2

PROGRAMME DE L'UNITE ALGEBRE 3

Structures algébriques usuelles (18 H)

L'étude des structures algébriques permet d'approfondir plusieurs points abordés en première année : arithmétique de $\mathbb{Z}$ et de $\mathbb{K}[X]$, congruences, algèbre linéaire, groupe symétrique, groupes issus de l'algèbre linéaire et de la géométrie des espaces euclidiens. Ce chapitre gagne à être illustré par de nombreux exemples.
Le paragraphe relatif aux polynômes permet de revenir sur l'étude menée en première année, dans un cadre étendu et dans un esprit plus algébrique, mettant l'accent sur la notion d'idéal.
Sans soulever de difficulté, on signalera que les notions d'algèbre linéaire étudiées en première année s'étendent au cas où le corps de base est un sous-corps de $\mathbb{C}$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Groupes et sous-groupes	
Groupe. Produit fini de groupes. Sous-groupe. Caractérisation. Intersection de sous-groupes. Sous-groupe engendré par une partie. Sous-groupes du groupe $(\mathbb{Z},+)$.	Exemples issus de l'algèbre et de la géométrie.
b) Morphismes de groupes	
Morphisme de groupes. Image et image réciproque d'un sous-groupe par un morphisme. Image et noyau d'un morphisme. Condition d'injectivité d'un morphisme. Isomorphisme de groupes. Réciproque d'un isomorphisme.	Exemples : signature, déterminant. Exemple : groupe spécial orthogonal d'un espace euclidien.
Groupes monogènes et cycliques	
Groupe $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$. Générateurs de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Groupe monogène, groupe cyclique. Tout groupe monogène infini est isomorphe à $(\mathbb{Z},+)$. Tout groupe monogène fini de cardinal n est isomorphe à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},+)$.	Groupe des racines n-ièmes de l'unité.
Ordre d'un élément dans un groupe	
Élément d'ordre fini d'un groupe, ordre d'un tel élément.	Si x est d'ordre fini, l'ordre de x est le cardinal du sous-groupe de G engendré par x.
Si x est d'ordre fini d et si e désigne le neutre de G, alors, pour n dans $\mathbb{Z}$, on a $x^n = e \Longleftrightarrow d \mid n$.	
L'ordre d'un élément d'un groupe fini divise le cardinal du groupe.	La démonstration n'est exigible que pour G commutatif.
Anneaux	
Anneau. Produit fini d'anneaux. Sous-anneaux. Morphisme d'anneaux. Image et noyau d'un morphisme. Isomorphisme d'anneaux.	Les anneaux sont unitaires.
Anneau intègre. Corps. Sous-corps.	Les corps sont commutatifs.
Idéaux d'un anneau commutatif	
Idéal d'un anneau commutatif. Le noyau d'un morphisme d'anneaux est un idéal.	
Relation de divisibilité dans un anneau commutatif intègre.	Interprétation de la divisibilité en termes d'idéaux.
Idéaux de $\mathbb{Z}$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$	
Anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	
Inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ est un corps si et seulement si n est premier.
Théorème chinois : si m et n sont deux entiers premiers entre eux, isomorphisme naturel de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.	Application aux systèmes de congruences.
Indicatrice d'Euler φ. Calcul de $\varphi(n)$ à l'aide de la décomposition de n en facteurs premiers.	
Théorème d'Euler.	Lien avec le petit théorème de Fermat étudié en première année.
Anneaux de polynômes à une indéterminée	
Dans ce paragraphe, K est un sous-corps de $\mathbb{C}$.	
Idéaux de $K[X]$.	
PGCD de deux polynômes.	Par convention, le PGCD est unitaire. Extension au cas d'une famille finie.
Relation de Bézout. Lemme de Gauss.	
Irréductible de $K[X]$. Existence et unicité de la décomposition en facteurs irréductibles.	Les étudiants doivent connaître les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$. L'étude des polynômes sur un corps fini est hors programme.
Algèbres	
Algèbre.	Les algèbres sont unitaires. Exemples : $\mathbb{K}[X]$, $\mathscr{L}(E)$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{F}(A,\mathbb{K})$.
Sous-algèbre.	
Morphisme d'algèbres.	

Réduction des endomorphismes et des matrices carrées (42 H)

La réduction des endomorphismes et des matrices prolonge les notions d'algèbre linéaire vues en classe de première année et trouve des applications dans d'autres domaines du programme.

Les méthodes présentées dans ce chapitre sont de deux types, qu'il convient de souligner : les premières, de nature géométrique, reposent sur les notions de sous-espace stable et d'éléments propres ; les secondes, de nature algébrique, font appel aux polynômes annulateurs.

On se limite en pratique au cas où le corps de base $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Contenus	Capacités & commentaires
Généralités	
Consolidation des acquis de première année en algèbre linéaire.	Somme directe de plusieurs s.e.v, base adaptée.
Théorème de rang.	Noyau et image d'une application linéaire, matrice d'une application linéire, changment de bases.
Matrices semblables, interprétation géométrique.	
Dualité.	Forme linéaire, base duale.
Sous-espace stable par un endomorphisme. Endomorphisme induit.	

Contenus	Capacités & commentaires
Éléments propres d'un endomorphisme, d'une matrice carrée	
Droite stable par un endomorphisme. Valeur propre, vecteur propre (non nul), sous-espace propre. Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie est l'ensemble de ses valeurs propres.	
La somme d'une famille finie de sous-espaces propres est directe. Le spectre d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie n est fini, et de cardinal au plus n. Si deux endomorphismes u et v commutent, tout sous-espace propre de u est stable par v.	Toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libre.
Valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres et spectre d'une matrice carrée.	Équation aux éléments propres $MX = \lambda X$. Deux matrices semblables ont même spectre. Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, le spectre de M dans $\mathbb{R}$ est contenu dans le spectre de M dans $\mathbb{C}$.
Polynôme caractéristique	
Polynôme caractéristique d'une matrice carrée, d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.	Deux matrices semblables ont même polynôme caractéristique. Le polynôme caractéristique est unitaire. Notations χ_u, χ_A. Les étudiants doivent connaître les valeurs des coefficients de degrés 0 et $n-1$.
Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres. Multiplicité d'une valeur propre. Polynôme caractéristique d'une matrice triangulaire. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme induit.	La dimension du sous-espace propre associé à λ est majorée par la multiplicité de λ.
Endomorphismes et matrices carrées diagonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.	Une telle base est constituée de vecteurs propres.
Pour qu'un endomorphisme soit diagonalisable, il faut et il suffit que la somme de ses sous-espaces propres soit égale à E. Une matrice carrée est dite diagonalisable si l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé est diagonalisable. Pour qu'une matrice carrée soit diagonalisable, il faut et il suffit qu'elle soit semblable à une matrice diagonale.	Cas des projecteurs, des symétries.
Cas d'un endomorphisme d'un espace de dimension n admettant n valeurs propres distinctes.	Traduction matricielle.
Pour qu'un endomorphisme u soit diagonalisable, il faut et il suffit que χ_u soit scindé et que, pour toute valeur propre de u, la dimension de l'espace propre associé soit égale à sa multiplicité.	Traduction matricielle.
Endomorphismes et matrices carrées trigonalisables	
Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure. Une matrice carrée est dite trigonalisable si elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure. Pour qu'une matrice carrée soit trigonalisable, il faut et il suffit que l'endomorphisme canoniquement associé le soit.	Interprétation géométrique.

Contenus	Capacités & Commentaires
Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé.	Traduction matricielle. Expression de la trace et du déterminant d'un endomorphisme trigonalisable, d'une matrice trigonalisable à l'aide des valeurs propres.

Endomorphismes nilpotents, matrices nilpotentes

Endomorphisme nilpotent d'un espace vectoriel E de dimension finie, matrice nilpotente. Un endomorphisme est nilpotent si et seulement s'il est trigonalisable avec pour seule valeur propre 0. L'indice de nilpotence est majoré par la dimension de E.	

Polynômes d'un endomorphisme, d'une matrice carrée

Pour u dans $\mathscr{L}(E)$, morphisme d'algèbres $P \mapsto P(u)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$. Le noyau de ce morphisme est l'idéal annulateur de u. Son image est la sous-algèbre commutative $\mathbb{K}[u]$ de $\mathscr{L}(E)$.	Pour M dans $\mathbb{K}[X]$, morphisme $P \mapsto P(M)$ de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, idéal annulateur de M, sous-algèbre $\mathbb{K}[M]$ de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Polynôme minimal d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie, d'une matrice carrée.	Le polynôme minimal est unitaire.
Si d est le degré du polynôme minimal de u, alors la famille $(u^k)_{0\leqslant k\leqslant d-1}$ est une base de $\mathbb{K}[u]$.	
Si P annule u, toute valeur propre de u est racine de P.	Si $u(x) = \lambda\, x$, alors $P(u)(x) = P(\lambda)\, x$.
Théorème de Cayley-Hamilton.	Démonstration non exigible.

Lemme de décomposition des noyaux

Si $P_1, \dots, P_r$ sont des éléments de $\mathbb{K}[X]$ deux à deux premiers entre eux de produit égal à P, alors :

$$\operatorname{Ker}(P(u)) = \bigoplus_{i=1}^{r} \operatorname{Ker}(P_i(u)).$$

Polynômes annulateurs et diagonalisabilité

Un endomorphisme u est diagonalisable si et seulement s'il existe un polynôme scindé à racines simples annulant u, ou encore si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples. Polynôme minimal d'un endomorphisme induit. Diagonalisabilité d'un endomorphisme induit.	Traduction matricielle.

Endomorphismes à polynôme minimal scindé

S'il existe un polynôme scindé annulant u, décomposition de E en somme directe de sous-espaces stables par u sur chacun desquels u induit la somme d'une homothétie et d'un endomorphisme nilpotent.	Traduction matricielle.

Équations différentielles linéaires (12 H)

La notion générale d'équation différentielle linéaire est introduite à partir des exemples étudiés en première année : équation scalaire d'ordre 1, équation scalaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

On limitera la technicité des exercices d'application. On pourra en revanche présenter aux étudiants divers exemples d'études qualitatives d'équations différentielles linéaires scalaires ou de systèmes linéaires. Concernant les systèmes à coefficients constants, on pourra souligner le rôle du signe des parties réelles des valeurs propres de la matrice ; on pourra également, en dimension 2, représenter certaines des courbes intégrales.

Dans ce chapitre, I est un intervalle de $\mathbb{R}$, E un espace normé de dimension finie.

Contenus	Capacités & commentaires
Généralités	
Équation différentielle linéaire : $$x' = a(t)(x) + b(t)$$ où a est une application continue de I dans $\mathscr{L}(E)$ et b une application continue de I dans E.	Forme matricielle : systèmes différentiels linéaires $X' = A'(t)X + B(t)$. Équation différentielle homogène associée à une équation différentielle linéaire. Principe de superposition.
Problème de Cauchy. Représentation d'une équation scalaire linéaire d'ordre n par un système différentiel linéaire. Problème de Cauchy pour une équation linéaire scalaire d'ordre n.	Mise sous forme intégrale d'un problème de Cauchy.
Solutions d'une équation différentielle linéaire	
Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy. Cas des équations scalaires d'ordre n. Cas des équations homogènes : l'ensemble des solutions est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,E)$. Pour t_0 dans I, l'application $x \mapsto x(t_0)$ est un isomorphisme de cet espace sur E. Dimension de l'espace des solutions. Cas des équations scalaires homogènes d'ordre n. Structure de l'ensemble des solutions d'une équation avec second membre. Exemples d'équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 ou 2 non résolues : $a(x)y' + b(x)y = c(x), \quad a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = d(x)$.	Démonstration non exigible.
Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice	
Exponentielle d'un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, d'une matrice réelle ou complexe. Continuité de l'exponentielle.	Notations $\exp(a), \mathrm{e}^a, \exp(A), \mathrm{e}^A$.
Exponentielle de la somme de deux endomorphismes qui commutent.	Démonstration non exigible.
Dérivation, si a est un endomorphisme d'un espace normé de dimension finie, de l'application $t \mapsto \exp(ta)$.	Dérivation de $t \mapsto \exp(tA)$ si A est une matrice carrée réelle ou complexe.
Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants	
Résolution du problème de Cauchy $$x' = a(x), \quad x(t_0) = x_0$$ si a est un endomorphisme de E et x_0 un élément de E.	Traduction matricielle.

Contenus	Capacités & Commentaires
Méthode de variation des constantes	
Méthode de variation des constantes pour les systèmes différentiels linéaires à coefficients continus. Cas particulier des systèmes différentiels à coefficients constants.	
Équations différentielles scalaires du second ordre	
Adaptation de la méthode de variation des constantes aux équations scalaires du second ordre.	
Wronskien de deux solutions d'une équation scalaire homogène d'ordre 2.	Définition et calcul. Cas d'une équation $x'' + q(t)x = 0$.

PROGRAMME DE L'UNITE ALGEBRE 4

Formes bilinéaires symétriques et formes quadratiques (12H)

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Formes bilinéaires symétriques	
Formes quadratiques	
Réduction de Gauss. Bases orthogonales .	

Espaces préhilbertiens réels. Endomorphismes des espaces euclidiens (48 H)

L'objectif de ce chapitre est triple :

- *consolider les acquis de première année concernant les espaces préhilbertiens réels et les espaces euclidiens en réintroduisant brièvement les notions vues en première année . Rappeler les résultats fondamentaux et faire des applications ;*
- *introduire la notion de suite orthonormale totale de vecteurs d'un espace préhilbertien, notamment afin de donner un exemple important de convergence dans un espace normé ;*
- *à travers l'étude des endomorphismes symétriques et orthogonaux, approfondir simultanément les connaissances de première année relatives aux isométries et celles de deuxième année relatives à la réduction des endomorphismes.*

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Produit scalaire	
Produit scalaire. Espace préhilbertien, espace euclidien. Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$, produit scalaire $(f\|g) = \int_a^b fg$ sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$.	Notations $\langle x, y\rangle$, $(x\|y)$, $x.y$.
Norme associée à un produit scalaire	
Norme associée à un produit scalaire, distance. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Inégalité triangulaire, cas d'égalité. Formule de polarisation : $2\langle x, y\rangle = \\|x+y\\|^2 - \\|x\\|^2 - \\|y\\|^2$.	Exemples : sommes finies, intégrales.
Orthogonalité	
Vecteurs orthogonaux, orthogonal d'une partie.	Notation $X^{\perp}$. L'orthogonal d'une partie est un sous-espace.
Famille orthogonale, orthonormale (ou orthonormée). Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Théorème de Pythagore. Algorithme d'orthonormalisation de Schmidt.	
Bases orthonormales	
Existence de bases orthonormales dans un espace euclidien. Théorème de la base orthonormale incomplète. Coordonnées dans une base orthonormale, expressions du produit scalaire et de la norme.	
Produit mixte dans un espace euclidien orienté.	Notation $[x_1,\dots,x_n]$. Interprétation géométrique en termes de volume orienté, effet d'une application linéaire.

Contenus	Capacités & Commentaires
Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie	
Supplémentaire orthogonal d'un sous-espace de dimension finie.	En dimension finie, dimension de l'orthogonal.
Projection orthogonale. Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.	
Distance d'un vecteur à un sous-espace. Le projeté orthogonal de x sur V est l'unique élément de V qui minimise la distance de x à V .	Notation $d(x, V)$.
Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormale.	
Inégalité de Bessel.	
Hyperplans affines d'un espace euclidien	
Vecteur normal à un hyperplan affine d'un espace euclidien. Si l'espace est orienté, orientation d'un hyperplan par un vecteur normal.	Lignes de niveau de $M \mapsto \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}$.
Équations d'un hyperplan affine dans un repère orthonormal.	Cas particuliers de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Distance à un hyperplan affine défini par un point A et un vecteur normal unitaire $\overrightarrow{n}$: $\left\|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}\right\|$.	Cas particuliers de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Suites orthonormales de vecteurs d'un espace préhilbertien réel	
Suite totale.	Exemples de suites de polynômes orthogonaux.
Si $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est une suite orthonormale totale d'éléments de l'espace préhilbertien E, et si, pour tout n de $\mathbb{N}$, p_n désigne le projecteur orthogonal de E sur Vect $(e_0, \dots, e_n)$, alors, pour tout x de E, $\big(p_n(x)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers x.	
Adjoint d'un endomorphisme	
Adjoint d'un endomorphisme.	
Matrice associée à l'adjoint dans une base orthonormale.	
Endomorphismes symétriques d'un espace euclidien	
Endomorphisme symétrique d'un espace euclidien.	Lien avec les matrices symétriques réelles.
Caractérisation des projecteurs orthogonaux comme projecteurs symétriques.	.
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable.	
Théorème spectral : si u est un endomorphisme symétrique d'un espace euclidien E, alors E est somme directe orthogonale des sous-espaces propres de u ; de manière équivalente, il existe une base orthonormale diagonalisant u.	Interprétation matricielle de ce résultat. .
Matrices orthogonales	
Matrice orthogonale : définition ${}^tAA = I_n$, caractérisation par le caractère orthonormal de la famille des colonnes, des lignes.	Notations $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \mathrm{O}(n)$.
Groupe orthogonal.	
Lien entre les notions de base orthonormale.	
Déterminant d'une matrice orthogonale.	
Groupe spécial orthogonal.	Notations $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}), \mathrm{SO}(n)$.

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Isométries vectorielles d'un espace euclidien	
Isométrie vectorielle d'un espace euclidien : définition par la linéarité et la conservation des normes, caractérisation par la conservation du produit scalaire, caractérisation par l'image d'une base orthonormale.	Autre appellation : automorphisme orthogonal. Lien avec les matrices orthogonales. Caractérisation des automorphismes orthogonaux par la relation $u^* u = uu^* = \mathrm{Id}_E$.
Symétrie orthogonale, réflexion.	
Groupe orthogonal.	Notation $\mathrm{O}(E)$.
Isométries vectorielles en dimension 2 : Description des matrices orthogonales et orthogonales positives de taille 2.	Lien entre les éléments de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ et les nombres complexes de module 1.
Rotation vectorielle d'un plan euclidien orienté.	On introduira à cette occasion, sans soulever de difficulté sur la notion d'angle,la notion de mesure d'un angle orienté de vecteurs.
Classification des isométries d'un plan euclidien orienté.	
Stabilité de l'orthogonal d'un sous-espace stable par une isométrie	
Réduction d'une isométrie vectorielle en base orthonormale.	Interprétation matricielle.
Cas particulier : réduction d'une isométrie vectorielle directe d'un espace euclidien de dimension 3.	

Espaces préhilbertiens complexes (12H)

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Produit scalaire sur un $\mathbb{C}-$espace vectoriel	
Exemples fondamentaux.	
Espace hermitien	
Relation entre produit scalaire et norme	
Orthogonalité	
Projection orthogonale	
Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel de dimension finie.	

PROGRAMME DE L’UNITE ANALYSE 3

Contenus	Capacités & commentaires
Intégrales généralisées	
Intégrale généralisée, les intégrales de références , convergence absolue, critères de comparaison et d’équivalence, règle d’Abel (admise).	
Séries numériques	
Rappels des acquis de 1ère année sur les séries numériques . Convergence absolue. Comparaison entre série et intégrale généralisée, comparaison aux séries de référence, critères de convergence, critère des séries alternées, critère d’Abel (admis), équivalent des sommes partielles et des restes, produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.	
Suites et séries de fonctions	
Convergence simple et uniforme. Approximation uniforme. Approximation uniforme d’une fonction continue par morceaux sur un segment par des fonctions en escalier.	
Théorème de Weierstrass : Toute fonction continue sur un segment y est limite uniforme de fonctions polynomiales.	Démonstration non exigible.
Théorèmes de continuité, de dérivabilité . Théorème d’intégration avec hypothèse de convergence uniforme sur un segment. Théorème de convergence dominée Séries de fonctions, convergences simple, normale et uniforme. Règle d’Abel pour la convergence uniforme des séries de fonctions. Cas des séries alternées.Théorèmes de passage à la limite terme à terme, de dérivation terme à terme, d’intégration terme à terme.	
Séries entières	
Séries entières,Lemme d’Abel, rayon de convergence. Dérivation et intégration des séries entières à variable réelle. Fonction exponentielle d’une variable complexe, fonctions $z \mapsto \sin z, z \mapsto \cos z, \ldots$ Développement en séries entières des fonctions usuelles. Produit de deux séries entières.	
Séries de Fourier	
Séries trigonométriques. Coefficients de Fourier. Convergence en moyenne quadratique, convergence normale. Théorème de Dirichlet. Formule de Parseval.	

PROGRAMME DE L'UNITE ANALYSE 4

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
Eléments de topologie de $\mathbb{R}^n$	
Normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$. Boules, voisinages, ouverts, fermés, adhérence, frontière. Suites de $\mathbb{R}^n$. Compacité d'une partie de $\mathbb{R}^n$ (définition à l'aide des suites). Connexité, connexité par arcs, les connexes de $\mathbb{R}$.	
Fonctions de plusieurs variables	
Limite, continuité, continuité uniforme.	
Calcul différentiel	
Dérivées partielles d'orde 1 et 2, fonctions de classe C^1 et de classe C^2 sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$, Théorème de Schwarz. Différentiabilité d'une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$. ,matrice jacobienne. Formule de Taylor d'ordre 2, extrémums.	
Fonction définie par une intégrale	
Continuité et dérivabilité d'une fonction définie sur un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ par une intégrale (l'intervalle d'intégration étant un segment ou un intervalle quelconque)	

Initiation au calcul scientifique 1 (Unité transversale S3)

(MATLAB ou SCILAB)

Volume horaire : 1h30/semaine : cours intégré sur ordinateur

Objectif : Se familiariser avec un outil de calcul numérique tel que SCILAB ou MATLAB. Le logiciel, ainsi choisie, sera par la suite l'outil utilisé pour les TD sur machine des différents modules de calcul scientifique.

Programme:

I- Eléments de base

- Utilisation de MATLAB à la manière d'une calculatrice scientifique
- Calcul sur les nombres complexes
- Calcul matriciel
- Création de fonction à une et plusieurs variables et traçage de courbes
- Calcul sur les polynômes

II- Programmation

- Opérateurs logiques
- Boucles : FOR , WHILE , **BREAK**
- IF ELSE ELSEIF , **SWITCH**
- Script et fonctions
- Affichage à l'écran (DISP) et Saisie au clavier (INPUT)
-

Initiation au calcul scientifique 2 (Unité transversale S4)

Volume horaire : 1h30/semaine : cours intégré sur ordinateur

Objectif : Dans ce cours, on mettra en évidence la nécessité et l'importance du calcul scientifique et ses domaines d'application. Dans chaque chapitre, les méthodes présentées seront programmées et une étude théorique et numérique de l'erreur sera effectuée. Il est recommandé de choisir quelques exercices issus de la réalité.

Programme:

- Résolution d'équation non linéaire à une inconnue :

  Méthodes de Dichotomie, Newton, du point fixe.

- Approximation de fonctions et de données :

  Interpolation de Lagrange.

- Intégration numérique:

  Formules de Newton-Cotes composites.

Programme de l'unité de physique en L2 mathématique : 2h cours et 3h TD.

Electromagnétisme

Objectif : Etude de l'électrostatique et de la magnétostatique, des égimes variables, des équations de Maxwell et des ondes électromagnétiques dans le vide et les milieux.

Contenu :

- Electrostatique. Magnétostatique.
- Régimes variables.
- Force électromotrice. Loi de Faraday-Henry.
- Equation d'Ampère-Maxwell. Equations de Maxwell.
- Potentiels électromagnétiques.
- Solutions en ondes planes des équations de Maxwell dans le vide.
- Polarisation.
- Milieux diélectriques et aimantes.
- Milieux conducteurs.
- Conditions de raccordement.
- Conservation de l'énergie.

Programme de l'unité d'informatique en L2 mathématique : 3h cours(CI) et 2h TP.

Algorithmique et programmation 2

Contenu :

-concevoir un sous-programme et son paramétrage

- concevoir un programme à l'aide d'une méthode descendante

-initiation à la récursivité

-concevoir une structure de données (listes, files, piles, arbres, graphe)

- programmation dans le langage C comme langage support (ce choix peut être revu en cas d'évolution notoire des langages de programmation)

L3

Parcours : Mathématiques

Programme des unités d'enseignement de S5 en LFM3

Parcours : Mathématiques

Algèbre (S5)

- **Groupes** : Homomorphismes de groupes. Ordre d'un élément dans un groupe. Groupes cycliques. Groupe quotient. Décomposition canonique d'un homomorphisme
- **Groupe opérant sur un ensemble :** Stabilisateur, équation des classes. Théorèmes de Sylow. Structure des groupes abéliens finis.
- **Anneaux**
- **:** Anneaux commutatifs, anneaux intègres. Caractéristique d'un anneau. Idéaux, anneau principal, anneau quotient. Idéaux premiers, maximaux.
- **Corps :** Définition et exemples. Introduction aux extensions des corps.

Calcul intégral (S5)

- Tribu, fonctions mesurables, approximation par des fonctions étagées.
- Mesures, intégrale d'une fonction mesurable par rapport à une mesure. Mesure de Lebesgue (existence et unicité admises).
- Théorèmes de convergence ; application aux fonctions définies par une intégrale.
- Espaces L^p.
- Théorème de changement de variables pour la mesure de Lebesgue (admis) et applications.
- produit, mesures produit, Théorème de Fubini.

Topologie dans les espaces métriques (S5)

- Distance, ouverts et topologie, fermés, adhérence, intérieur, voisinages. Exemples : espaces vectoriels normés, produit fini d'espaces métriques, topologie induite.
- Suites, limites, valeurs d'adhérence.
- Applications continues. Limite uniforme d'applications continues. Homéomorphismes.
- Complétude : R (admis) et Rn comme produit d'espaces complets ; fermés d'un complet ; espaces fonctionnels . Théorème du point fixe de Banach.
- Compacité. Bolzano-Weierstrass, Borel-Lebesgue, toute partie compacte est fermée. Produit fini de compacts ; compacts de R, et de Rn. Image continue d'un compact, bijection continue entre compacts ; uniforme continuité. Un compact est complet.
- Espaces vectoriels normés. Normes équivalentes. Exemples : Rn, divers espaces fonctionnels. Applications linéaires continues ; norme sur Lc(E,F). En dimension finie toutes les normes sont équivalentes, applications linéaires continues ; théorème de compacité de Riesz.
- Espaces de Banach. Exemples : espaces fonctionnels (Lc(E,F), espaces lp …)
- Connexité. Image continue d'un connexe. Connexes de R, connexité par arcs ; exemple : ouverts connexes de Rn. Composantes connexes.

Schémas numériques pour E.D.O. (Unité transversale S5)

Volume horaire : 2h/semaine : cours intégré sur ordinateur

Objectif : Comprendre, programmer et analyser quelques méthodes numériques pour approcher des solutions d'équations différentielles ordinaires (EDO).

Programme:

1) Schémas numériques à un pas :

Schémas d'Euler explicite, implicite, point milieu, de Heun et schémas de Runge-Kutta. Il est recommandé au cours de cette partie de simuler un problème issu de la réalité (Par exemple : Résolution du système d'équation de Lotka-Volterra, qui modélise un système de proie-prédateur)

2) Etude d'erreur :

- Etude numérique de l'erreur et de l'ordre de convergence.
- Etude théorique : Analyse de convergence : Présentation, démonstration et application des théorèmes de stabilité, consistance et convergence.

Unités d'enseignement de S6 pour LFM3

Parcours : Mathématiques

Calcul différentiel (S6)

- Application différentiable sur un ouvert d'un espace de Banach. Dérivée selon un vecteur. Dérivées partielles. Différentielle d'ordre 2.
- Théorème des accroissements finis.
- Dans le cadre des espaces de dimensions finies : applications de classe C^n en termes de dérivées partielles d'ordre n, théorème de Schwarz, formule de Taylor à l'ordre n.
- Théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites. Théorème du rang constant.
- Sous-variétés de R^n.
- Extrémums et extrémums liés.

Méthodologie (S6) (Unité transversale)

Description : L'objet de cette unité est d'initier les étudiants au Travail personnel encadré en mathématiques . Ils seront amenés à aborder et à approfondir un thème de Mathématiques du niveau de la licence ou se rapportant aux programmes des collèges et lycées. Ce travail est encadré par un enseignant du Département de Mathématiques. Le projet doit mener à une compréhension du thème proposé, compréhension attestée par la rédaction d'un mémoire et par une soutenance orale.

L'organisation se fait en faisant repartir les étudiants en des groupes de TD d'une dizaine d'étudiants.

Statistiques (S6) (Unité transversale)

- Brefs rappels de probabilités
- Représentations graphiques, indicateurs de position et de dispersion.
- Introduction aux méthodes d'estimation : méthode des moments.
- Principe et pratique des tests statistiques : niveau de confiance, puissance, p-valeur.
- Tests classiques d'adéquation : test du khi2, test de Kolmogorov-Smirnov. Exemples de tests paramétriques et non-paramétriques, exacts et asymptotiques.

Dans tout le cours, une large place est faite aux illustrations des notions abordées au moyen de simulations informatiques.

Deux unités à fixer par le département parmi la liste suivante :

1) Equations Différentielles

- Equations différentielles : définitions et exemples. Notion de solution locale, théorème de Cauchy-Lipschitz, solutions maximales, solutions globales (critère d’extension), lemme de Gronwall. Dépendance

- Equations différentielles linéaires

Résolvantes, Wronskien, théorème de Liouville, variation de la constante, formule de Duhamel. Résolution explicite dans le cas des coefficients constants.
Solutions développables en série entière.

- Champs de vecteurs, flot d’une équation différentielle autonome ; domine de régularité, point singulier, orbite, équivalence de deux champs de vecteurs, linéarisation.
- Stabilité des points singuliers au sens de Lyapunov. Fonction de Lyapunov.
- . Equations différentielles linéaires dans le plan : systèmes dynamiques dans le plan. Stabilité de Lyapunov

2) Probabilités

Objectifs : Maîtrise du langage et des outils de la Théorie des Probabilités.

- Espaces probabilisés, lois de variables aléatoires, probabilités conditionnelles, formules de Bayes et des probabilités totales, notion de loi conditionnelle
- Indépendance d'évènements, de tribus, de variables aléatoires.
- Variables aléatoires réelles discrètes, de lois absolument continues,
- Fonctions de répartition, espérance, moments, fonctions caractéristiques.
- Introduction aux convergences probabilistes, loi faible des grands nombres, théorème central limite.
- Applications à l'estimation statistique.

3) **Analyse numérique et optimisation**

- Systèmes linéaires, rappels sur les méthodes directes, conditionnement, exemples de méthodes itératives.
- Systèmes non linéaires, méthodes de point fixe, méthode de Newton en dimension n.
- Optimisation sans contrainte, théorèmes d’existence et d’unicité, méthode de descente, algorithme du gradient conjugué, méthodes de Newton et quasi-Newton.
- Optimisation avec contraintes, théorèmes d’existence et d’unicité, méthodes de gradient avec projection, méthodes de dualité.

4) Fonctions Holomorphes

- Fonctions holomorphes, exemples, série entières, logarithme et exponentielle, équations de Cauchy-Riemann, fonctions harmonique
- Théorème et formule de Cauchy. Applications, fonctions analytiques, principe du Maximum, théorème de l'image ouverte. Théorèmes de Liouville et d'Alembert
- Développement en séries de Laurent, points singuliers, fonctions méromorphes. Théorème des résidus, calculs d'intégrales.

5) Géométrie élémentaire

- **Rappels et compléments de géométrie affine euclidienne.**
  Espaces et applications affines. Calcul barycentrique. Convexité.
  Espaces affines euclidiens, orthogonalité. Isométries : formes réduites, classification en dimensions 2 et 3, engendrement du groupe orthogonal.
- **Géométrie classique dans le plan et l'espace.**
  Aires et volumes.
  Angles non orientés. Angles orientés dans le plan.
  Étude de configurations classiques : triangles, cercles, faisceaux de cercles, polyèdres réguliers.
  Coniques : définitions géométriques, classification, étude analytique.

L3

Parcours : Mathématiques et Applications

Programme des unités d’enseignement de S5

en LFM3 : parcours Mathématiques et Applications

Topologie dans les espaces métriques (S5)

- Distance, ouverts et topologie, fermés, adhérence, intérieur, voisinages. Exemples : espaces vectoriels normés, produit fini d’espaces métriques, topologie induite.
- Suites, limites, valeurs d’adhérence.
- Applications continues. Limite uniforme d’applications continues.homéomorphismes.
- Complétude : R (admis) et Rn comme produit d’espaces complets ; fermés d’un complet ; espaces fonctionnels . Théorème du point fixe de Banach.
- Compacité. Bolzano-Weierstrass, Borel-Lebesgue, toute partie compacte est fermée. Produit fini de compacts ; compacts de R, et de Rn. Image continue d’un compact, bijection continue entre compacts ; uniforme continuité. Un compact est complet.
- Espaces vectoriels normés. Normes équivalentes. Exemples : Rn, divers espaces fonctionnels. Applications linéaires continues ; norme sur Lc(E,F). En dimension finie : normes équivalentes, applications linéaires continues ; théorème de compacité de Riesz.
- Espaces de Banach. Exemples : espaces fonctionnels (Lc(E,F), espaces lp …)
- Connexité. Image continue d’un connexe. Connexes de R, connexité par arcs ; exemple : ouverts connexes de Rn. Composantes connexes.

Calcul différentiel. (S5) : On se limitera à la dimension finie :

Il faudrait voir ce cours comme la suite naturelle du chapitre « fonctions de plusieurs variables » étudié en Analyse 4 en deuxième année.

- Différentielle, dérivées directionnelles et dérivées partielles. Exemples (applications linéaires, multilinéaires…).
- Théorème des accroissements finis.
- Fonctions de classe C1 : caractérisation ; suites et séries de fonctions C1 ; exemples (exponentielle matricielle).
- Théorème d'inversion locale et théorème des fonctions implicites.
- Applications aux courbes du plan et surfaces de l'espace ; espace vectoriel tangent
- Fonctions de classe C2. Théorème de Schwarz. Formules de Taylor ; application aux problèmes d'extrémums sans contrainte, aux fonctions convexes. Fonctions de classe Cp, et formules de Taylor. Optimisation sous contraintes d’égalités et Optimisation sous contraintes générales

Calcul intégral (S5)

- Tribu, fonctions mesurables, approximation par des fonctions étagées.
- Mesures, intégrale d’une fonction mesurable par rapport à une mesure. Mesure de Lebesgue (existence et unicité admises).
- Théorèmes de convergence ; application aux fonctions définies par une intégrale.
- Espaces L^p.
- Théorème de changement de variables pour la mesure de Lebesgue (admis) et applications.
- Tribus produit, mesures produit, Théorème de Fubini.

Schémas numériques pour E.D.O. (Unité transversale S5)

Volume horaire : 2h/semaine : cours intégré sur ordinateur

Objectif : Comprendre, programmer et analyser quelques méthodes numériques pour approcher des solutions d'équations différentielles ordinaires (EDO).

Programme:

1) Schémas numériques à un pas :

   Schémas d'Euler explicite, implicite, point milieu, de Heun et schémas de Runge-Kutta. Il est recommandé au cours de cette partie de simuler un problème issu de la réalité (Par exemple : Résolution du système d'équation de Lotka-Volterra, qui modélise un système de proie-prédateur)

2) Etude d'erreur :

   - Etude numérique de l'erreur et de l'ordre de convergence.
   - Etude théorique : Analyse de convergence : Présentation, démonstration et application des théorèmes de stabilité, consistance et convergence.

Programme des unités d'enseignement de S6 pour LFM3

Parcours : Mathématiques et applications

Analyse numérique (S6) Objectifs **:** Comprendre, programmer et analyser quelques méthodes numériques pour des problèmes fondamentaux d'analyse numérique. Il s'agit de faire une étude complète pour chaque méthode : fondement théorique (Démontrer et appliquer les théorèmes d'existence et d'unicité) , programmer et tester ces méthodes sur machine. Etude théorique et numérique de l'erreur .

- Résolution des systèmes linéaires **:**

Méthodes directes : Résolution des systèmes triangulaires. Méthode d'élimination de Gauss. Factorisations LU. Factorisation de Choleski. Factorisations LU avec recherche de pivots.

Analyse matricielle : Normes matricielles, conditionnement

Méthodes itératives : méthode de Jacobi, méthode de Gauss-Seidel

Méthodes projectives : méthode de Richardson, méthode du gradient à pas optimal, méthode du gradient conjugué.

- Calcul des valeurs propres et des vecteurs propres d'une matrice **:**

Méthode de la puissance itérée, méthode de la puissance inverse, méthodes de déflation, méthode QR.

- Approximation de fonctions et de données :

Interpolation d'Hermite. Interpolation linéaire par morceaux.

Interpolation par fonctions splines. Interpolation trigonométrique

Méthodologie (S6) (Unité transversale)

Description : L'objet de cette unité est d'initier les étudiants au travail personnel encadré en mathématiques . Ils seront amenés à aborder et à approfondir un thème de Mathématiques du niveau de la licence ou se rapportant aux programmes des collèges et lycées. Ce travail est encadré par un enseignant du Département de Mathématiques. Le projet doit mener à une compréhension du thème proposé, compréhension attestée par la rédaction d'un mémoire et par une soutenance orale.

L'organisation se fait en faisant repartir les étudiants en des groupes de TD d'une dizaine d'étudiants.

Statistiques (S6) (Unité transversale)

- Brefs rappels de probabilités
- Représentations graphiques, indicateurs de position et de dispersion.
- Introduction aux méthodes d'estimation : méthode des moments.

- Principe et pratique des tests statistiques : niveau de confiance, puissance, p-valeur.
- Tests classiques d'adéquation : test du khi2, test de Kolmogorov-Smirnov. Exemples de tests paramétriques et non-paramétriques, exacts et asymptotiques.

Dans tout le cours, une large place est faite aux illustrations des notions abordées au moyen de simulations informatiques.

Deux unités à fixer par le département parmi la liste suivante :

1) Statistiques et probabilités

. Rappels sur les espaces probabilisés, les probabilités conditionnelles, et l'indépendance d'évènements ;

- Loi d'une variable aléatoire réelle, modèles associés aux lois discrètes et aux densités classiques ;
- Vecteurs aléatoires réelles (lois jointes, lois marginales et dans le cas des lois discrètes, lois conditionnelles et espérance conditionnelle) ;
- Chaînes de Markov à espace d'états fini ;
- Convergence en probabilité et convergence en loi ;
- Loi faible des grands nombres, Théorème Central Limite ;
- Estimation, tests statistiques, régions de confiance, applications à l'étude des échantillons gaussiens.

Certaines séances de travaux dirigés seront remplacées par des séances de travail en Matlab sur machine pour illustrer les notions vues en cours.

2) Equations différentielles

- Introduction aux équations différentielles, le problème à deux corps, équations linéaires scalaires du premier ordre. exemples d'équations non-linéaires scalaires. Méthode de séparation des variables, équations homogènes, facteurs intégrants, exemples: équations de Riccati, de Bernouilli, de Lagrange-Clairaut.

- Théorèmes généraux. Théorème de Cauchy Lipschitz, Lemme de Gronwall, théorème de Péano. Solutions maximales, solutions globales.
  Dépendance continue.

- Systèmes et équations linéaires. Coefficients constants, coefficients variables, solutions développables en séries entières.

- Stabilité. Systèmes linéaires autonomes dans le plan. Méthode de Lyapounov.

  Systèmes dynamiques dans le plan.

- . Champs de vecteur, flot, équations aux dérivées partielles du premier ordre.

- . Méthodes numériques, généralités sur les méthodes à un pas. Consistance, stabilité, convergence Méthode d'Euler et du point milieu. Méthode de RungeKutta d'ordre 4.

3) Algèbre et Arithmétique

- **Groupes.** Définitions – Rappels sur les groupes cycliques. Le groupe des racines n-ième de l'unité. Morphismes de groupes – groupes des permutations – Introduction de la notion de groupe quotient pour les groupes commutatifs , le groupe Z/nZ.

- **Anneaux et corps.** Définitions –anneau intègre - morphismes d'anneaux – sous-anneaux et idéaux – idéaux premiers , idéaux maximaux - L’anneau des polynômes. Anneau quotient – L’anneau Z/nZ. Corps. Corps finis et lois de réciprocité. Applications à la résolution des équations algébriques
- **Arithmétique et Applications à la cryptographie**: L'anneau Z – division euclidienne – divisibilité – nombres premiers – algorithme d'Euclide – pgcd - Congruences; Fonction indicatrice d’Euler ;
 Applications à la cryptographie : -Système RSA, Signature ; le logarithme discret ; Cryptographie à clé publique ; Echange de clés Diffie-Hellman.

4) Mathématiques discrètes

- Combinatoire. Arrangements, combinaisons. Problèmes classiques combinatoires. Bijections. Exemple : mots de Dyck, arbres binaires et autres applications des nombres de Catalan.
- Récurrences, nombres de Fibonacci et leurs généralisations.
- Graphes. Définitions, connexité. Couplages, graphes bipartis. Graphes planaires, formule d'Euler, discussion de coloriages.
- Arithmétique. Congruences, équations linéaires modulo n (théorème de Bézout et théorème des restes revisités). Polynômes modulo p, le nombre de racines. Le groupe (Z/nZ)*, fonction d'Euler, générateurs, logarithme discret, équations. Carrés et non-carrés, la loi de réciprocité quadratique. Fonctions arithmétiques multiplicatives.
- Cryptographie classique et à clé publique.

5) Fonctions Holomorphes

- Fonctions holomorphes, exemples, série entières, logarithme et exponentielle, équations de Cauchy-Riemann, fonctions harmonique
- Théorème et formule de Cauchy. Applications, fonctions analytiques, principe du Maximum, théorème de l'image ouverte. Théorèmes de Liouville et d'Alembert
- Développement en séries de Laurent, points singuliers, fonctions méromorphes. Théorème des résidus, calculs d'intégrales.

.

6) Géométrie élémentaire

- **Rappels et compléments de géométrie affine euclidienne.**
  Espaces et applications affines. Calcul barycentrique. Convexité.
  Espaces affines euclidiens, orthogonalité. Isométries : formes réduites, classification en dimensions 2 et 3, engendrement du groupe orthogonal.
- **Géométrie classique dans le plan et l'espace.**
  Aires et volumes.
  Angles non orientés. Angles orientés dans le plan.
  Étude de configurations classiques : triangles, cercles, faisceaux de cercles, polyèdres réguliers.
  Coniques : définitions géométriques, classification, étude analytique.

7) Algorithmique Avancée (2h de CM - 2h de TD - 2h de TP)

- Graphes : tri topologiques ; composantes fortement connexes ; arbres couvrants ACM ; plus court chemin ; flot maximum.
- Structures de données : AVLarbres ; Barbres ; tas binomiaux ; adressage dispersé (hashcode).
- Méthodes : diviser pour régner ; algorithmes par balayage ; programmation dynamique ; algorithmes gloutons ; randomisation. Algorithmes de recherche de motifs. Langage utilisé : le C.